<u>Lernumgebung Skalarprodukt auf grundlegendem Niveau</u>

Ziel der Einheit:

- Einführung des Skalarproduktes (SK) zur Untersuchung von Winkeln zwischen Vektoren
- Nutzen das SK zur Berechnung von Winkeln zwischen Vektoren (auch bei Geraden und Ebenen)
- Nutzen das SK zur Längenbestimmung von projizierten Vektoren
- Nutzen das SK zur Bestimmung des Normalenvektors
- SK wird als mächtiges Messwerkzeug erkannt

Durchführungsmöglichkeit:

1. <u>Einstiegsaufgabe:</u>

Lehrkraft gibt die Rechenvorschrift bekannt (lässt sich mit Pythagoras begründen). Untersuchung bewusst nur in R^2 damit Vektoren gezeichnet und Winkel zwischen den Vektoren gemessen werden können.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

2. <u>Untersuchung von Vektorpaaren in $\mathbb{R}^2$</u>

<u>Arbeitsauftrag für Schülerinnen und Schüler:</u>

Suchen Sie möglichst viele verschiedene Paare von Vektoren, deren Skalarprodukt 0 ist. Sortieren Sie Ihren Vorschlag an geeigneter Stelle an der Tafel ein („Clustern“).

Zeichnen Sie die Ortsvektoren der gewählten Vektoren, was fällt auf?

Erkenntnis: $\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}}$ **und** $\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} \sim |\vec{a}|\ und\ |\vec{b}|}$

Weitere Untersuchungen:

- Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst
- Rechengesetzte für das Skalarprodukt

Übungen zum Skalarprodukt an Beispielen aus $\mathbb{R}^2$.

3. Erkenntnisse werden in $\mathbb{R}^3$ übertragen

Anhand von Beispielen wird überprüft, ob die Erkenntnisse aus $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}^3$ übertragen werden können (enaktiv oder über Begründung mit Pythagoras)

Arbeitsauftrag für Schülerinnen und Schüler:

Finden Sie einen Vektor, der zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ orthogonal ist.

Vergleicht man die Schülerlösungen, so wird man unterschiedliche orthogonale Vektoren zum Vektor $\vec{a}$ erhalten

Erkenntnis: Erkenntnisse aus $\mathbb{R}^2$ lassen sich auf $\mathbb{R}^3$ übertragen, die Eindeutigkeit geht aber verloren.

Übungen und Anwendungsaufgaben

4. Untersuchung unterschiedlicher Winkel

Es soll untersucht werden, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, dass das Skalarprodukt negativ wird.

Arbeitsauftrag für Schülerinnen und Schüler:

Finden Sie Vektoren, die mit dem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein negatives Skalarprodukt ergeben.

Zeichnen Sie die Ortsvektoren der gewählten Vektoren, was fällt auf?

Erkenntnis: Bei einem negativen Skalarprodukt bilden die beiden Vektoren einen stumpfen Winkel. Bilden die beiden Vektoren einen spitzen Winkel, so ist das Skalarprodukt positiv.

Bezug zum Kosinus wird hergestellt und die Definition des Skalarproduktes mit

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\,(\gamma)$$

eingeführt. Damit können Winkel berechnet werden.

Skalarprodukt ist ein mächtiges Werkzeug zur Messung!!!

5. Erkenntnisse werden in $\mathbb{R}^3$ übertragen

Üben an unterschiedlichen Beispielen aus $\mathbb{R}^3$.

6. Anwendungsaufgaben.

Als Anwendung das Skalarproduktes kann die Berechnung des Abstandes zwischen Punkt und Gerade bearbeitet werden (siehe Artikel in der MNU 06.2020: Abstandsformel Punkt-Gerade).