Aufgabenset 1 „Funktionen"

Wähle mindestens fünf der folgenden Aufgaben aus und bearbeite sie.
Für die Bearbeitung hast du 20 min Zeit – bitte in Einzelarbeit.

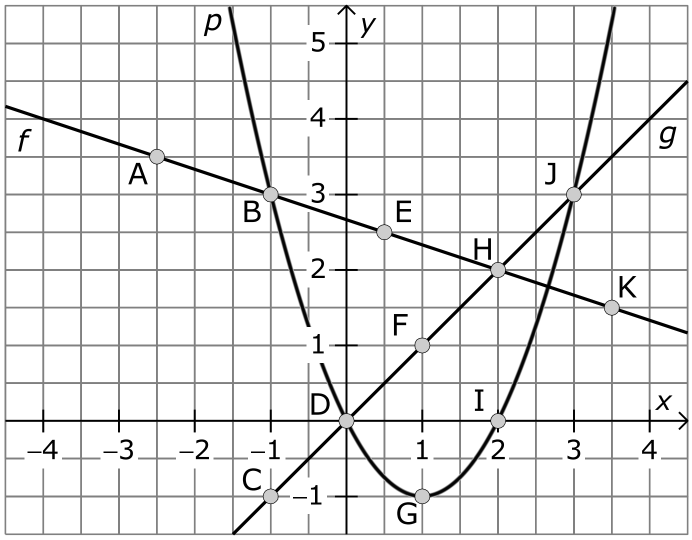
1) Bearbeite zwei der Teilaufgaben **a)** bis **d)**. Lies dazu die Koordinaten von den Graphen *f* und *p* ab:

a) Punkt A: Der Funktionswert von *f* bei $x = -2{,}5$ ist $y = f(-2{,}5) =$ ____ .

b) $f(0{,}5) =$ ____ , $f($____$) = 1{,}5$

c) $p(1) =$ ____ , $p(2) =$ ____

d) $p(x) = 0 \Rightarrow$ $x =$ ____ oder $x =$ ____



2) Trage passend ein: Die Parabel *p* hat den Scheitelpunkt __ (__ | __).
Gib eine Funktionsgleichung für die Parabel *p* an: $p(x) =$ ____________ .
Bestimme $p(2{,}5) =$ ____ ganz genau!

3) Die Gerade *g* hat die Steigung $m =$ ____ und den Achsenabschnitt $b =$ ____ .

4) Vergleiche die Schreibweise $h(x) = 2x - 3$ mit der Schreibweise $y = 2x - 3$, wenn für *x* die Zahl 8 eingesetzt wird. Betrachte auch $a(x) = 8x - 8$.

5) Löse die Gleichung $x^2 - 2x = 3$.
Erkläre die Bedeutung der Gleichung und der Lösungen an der Abbildung.

6) Die Gleichung $g(x) = p(x)$ hat die Lösungen $x = 0$ und $x = 3$.
Erkläre die Bedeutung der Gleichung und der Lösungen an der Abbildung.

7) Die Gerade *g* wird parallel nach unten verschoben. Die Steigung ist weiterhin +1, aber der Achsenabschnitt ist negativ. Zeichne diejenige Gerade *u* mit der Steigung 1 ein, die die Parabel an der Stelle $x = 1{,}5$ in einem einzigen Punkt trifft. Gib eine Funktionsgleichung dieser Geraden *u* an.

8) Die Gleichung $f(x) = p(x)$ hat zwei Lösungen. Gib an, wie man die Lösung $x = -1$ unmittelbar aus der Abbildung ablesen kann.
Stelle die Funktionsgleichung für die lineare Funktion *f* auf und bestimme die zweite Lösung der Gleichung $f(x) = p(x)$ rechnerisch.

9) Gib die Gleichung einer Parabel an, die durch die Punkte D, F und I geht.
Begründe: Es kann nur eine Parabel mit dieser Eigenschaft geben.

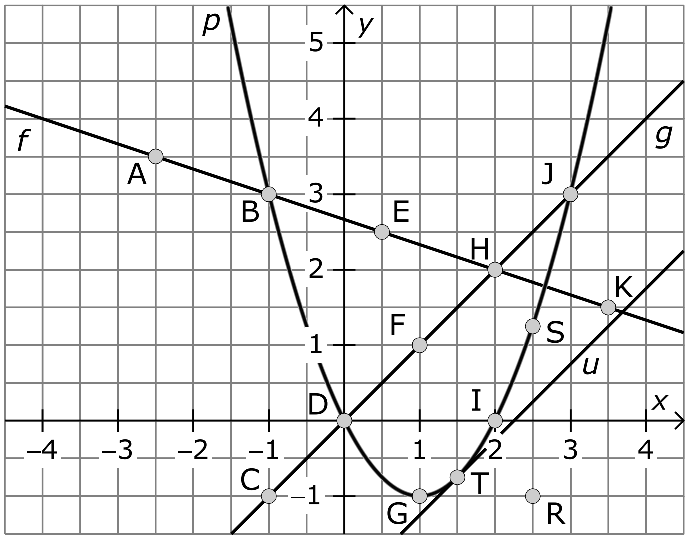
10) Gib die Gleichungen von zwei verschiedenen Parabeln an, die durch die Punkte D und F gehen. Begründe: Es gibt mehrere solcher Parabeln.

Hilfsmittel: Taschenrechner, auch zum Lösen von Gleichungen und für Wertetabellen; Formelsammlung

Lösungen zum Aufgabenset 1 „Funktionen "

Vergleiche deine Lösungen mit dem Lösungsblatt. Dafür hast du 5 min Zeit. Überlege dir, welche Aufgaben zusätzlich an der Tafel besprochen werden sollen.

1) Bearbeite zwei der Teilaufgaben **a)** bis **d)**. Lies dazu die Koordinaten von den Graphen *f* und *p* ab:



a) Punkt A: Der Funktionswert von *f* bei $x = -2{,}5$ ist $y = f(-2{,}5) = \underline{3{,}5}$.

b) $f(0{,}5) = \underline{2{,}5}$, $f(\underline{3{,}5}) = 1{,}5$

c) $p(1) = \underline{-1}$, $p(2) = \underline{0}$

d) $p(x) = 0 \Rightarrow$ $x = \underline{0}$ oder $x = \underline{2}$

2) Die Parabel *p* hat den Scheitelpunkt $\underline{G(1|-1)}$.

Mögliche Funktionsgleichungen sind $\underline{p(x) = (x-1)^2 - 1}$ oder $\underline{p(x) = x^2 - 2x}$.

Bestimme $p(2{,}5)$ ganz genau!

Rechnerisch mit der Funktionsgleichung:

$p(2{,}5) = (2{,}5-1)^2 - 1 = 1{,}5^2 - 1 = 2{,}25 - 1 = \underline{1{,}25}$ *oder*

$p(2{,}5) = 2{,}5^2 - 2 \cdot 2{,}5 = 6{,}25 - 5 = 1{,}25$ *oder*

Gedankliche Konstruktion einer verschobenen Normalparabel: Man geht vom Scheitelpunkt G (1 | –1) aus 1,5 Längeneinheiten nach rechts zum Punkt R (2,5 | –1) und von dort aus $1{,}5^2$ Längeneinheiten nach oben, das sind 2,25 Längeneinheiten, bis zum Punkt S (2,5 | 1,25).

3) Die Gerade *g* hat die Steigung $m = \underline{+1}$ und den Achsenabschnitt $b = \underline{0}$.

4) $h(8) = 2 \cdot 8 - 3$ Vorteil: Man erkennt, dass für *x* die Zahl 8 eingesetzt wurde.

Ausnahme: Bei $a(8) = 8 \cdot 8 - 8$ erkennt man nicht, welche 8 für *x* steht.

Nachteil: Man muss wissen, dass mit $h(x)$ der Funktionswert *y* berechnet wird.

$y = 2 \cdot 8 - 3$ Vorteil: Man erkennt, dass der Funktionswert *y* berechnet wird.

Nachteil: Man erkennt nicht, welche der Zahlen für *x* eingesetzt wurde.

5)

$$x^2 - 2x = 3$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 3 + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow \quad x - 1 = -2 \quad \text{oder} \quad x - 1 = 2$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \text{oder} \quad x = 3$$

Hinweis: *Es ist zulässig, derartige Gleichungen mit dem Taschenrechner zu lösen. Das bringt aber nur Vorteile, wenn die Bedienung dieser Taschenrechnerfunktion ausreichend geübt wird.*

... auf der Rückseite geht es weiter.

Lösungen zum Aufgabenset 1 „Funktionen "

Vergleiche deine Lösungen mit dem Lösungsblatt. Dafür hast du 5 min Zeit. Überlege dir, welche Aufgaben zusätzlich an der Tafel besprochen werden sollen.

..5) $p(x) = x^2 - 2x$ ist eine Funktionsgleichung der Parabel. Die Gleichung $x^2 - 2x = 3$ fragt, an welcher Stelle x der Funktionswert 3 ist, also $p(x) = 3$.
In den Punkten B (– 1 | 3) und J (3 | 3) ist diese Bedingung erfüllt.
Die Lösungen $x = -1$ und $x = 3$ sind die x-Koordinaten, die Funktionswerte $p(-1) = 3$ und $p(3) = 3$ sind die y-Koordinaten dieser beiden Punkte.

6) Die Gleichung $g(x) = p(x)$ fragt, an welcher Stelle x die y-Werte gleich groß sind, also, an welchen Stellen die Gerade und die Parabel sich schneiden.
Die beiden Schnittpunkte sind D (0 | 0) und J (3 | 3).
Die Lösungen $x = 0$ und $x = 3$ geben die x-Koordinaten der Schnittpunkte an. Die Funktionswerte an diesen Stellen, $g(0) = p(0) = 0$ und $g(3) = p(3) = 3$, geben die y-Koordinaten der beiden Schnittpunkte an.

7) An der Stelle $x = 1{,}5$ hat die Parabel den Funktionswert $p(1{,}5) = -0{,}75$. Die Gerade u geht durch den Punkt T (1,5 | –0,75) und hat die Steigung 1. Geht man von T aus 1,5 Längeneinheiten nach links zur y-Achse, muss man 1,5 Längeneinheiten nach unten gehen, um den Punkt U (0 | –2,25) der Geraden zu treffen. Die Geradengleichung lautet also $u(x) = x - 2{,}25$.

8) Die Gerade f und die Parabel p schneiden sich im Punkt B (–1 | 3). Also ist $x = -1$ eine Lösung der Gleichung $f(x) = p(x)$. Man liest $m = -\frac{1}{3}$ und $f(-1) = 3$ ab. Aus $f(-1) = -\frac{1}{3} \cdot (-1) + b$ folgt $b = f(-1) + \frac{1}{3} \cdot (-1) = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$.

$-\frac{1}{3}x + \frac{8}{3} = x^2 - 2x$ linker Term: $f(x)$, rechter Term: $p(x)$

$\Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{8}{3}$

$\Leftrightarrow \quad x = +\frac{5}{6} - \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{8}{3}} = +\frac{5}{6} - \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{96}{36}} = \frac{5}{6} - \frac{11}{6} = -1$ oder $x = +\frac{5}{6} + \sqrt{\frac{121}{36}} = \frac{8}{3}$

9) Eine quadratische Funktion kann höchstens zwei Nullstellen haben. Die Parabel schneidet die x-Achse in den Punkten D (0 | 0) und I (2 | 0). Der Punkt F (1 | 1) liegt "*in der Mitte zwischen den Nullstellen*", an der Stelle $x = 1$. Deshalb muss F der Scheitelpunkt sein.
Durch drei Punkte wird eine Parabel bestimmt. Weil die Punkte D (0 | 0) und I (2 | 0) vom Scheitelpunkt F (1 | 1) aus eine Längeneinheit links bzw. rechts und eine Längeneinheit tiefer liegen, muss die Parabel eine nach unten geöffnete Normalparabel sein. Der Funktionsterm lautet $-(x-1)^2 + 1$.

10) Durch nur zwei Punkte sind nicht alle drei Eigenschaften Scheitelpunkt, Stauchung/Streckung und Öffnung festgelegt. Beispiele für Parabeln, die durch D und F gehen, sind die unverschobene Normalparabel x^2, die verschobene Normalparabel $-(x-1)^2 + 1$ wie bei Aufgabe **9)** oder gestauchte Parabeln wie $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ oder $\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x$ oder $\frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{8}x$.

Was kannst du aus diesen Übungsaufgaben lernen? Was solltest du für den MSA über Funktionen wissen, was solltest du können?

Inhalte des Aufgabensets 1 „Funktionen "

	Koordinaten ablesen
P (x | y) Beispiel P (3 | 5)	*"erst horizontal, dann vertikal"* Ich besuche einen Freund, der im Haus Nr. 3 im 5. Stock wohnt. Ich gehe die Straße entlang bis zur Hausnummer 3 und dann erst nach oben in den 5. Stock.
	Funktionschreibweise
$y = f(x)$	Lies: "*y ist eine Funktion von x*"
$f(3) = 5$	Lies: "*f von 3 gleich 5*" oder "*Die Funktion f hat an der Stelle 3 den Wert 5*".
Stelle	Die Zahl, die man in den Funktionsterm einsetzt, heißt <u>Stelle</u> oder <u>Argument</u> der Funktion. Häufig nennt man diese Variable x.
Wert	Der Wert, den der Funktionsterm an einer bestimmen Stelle hat. Häufig verwendet man für den Wert die Variable y.
	Funktionswert berechnen
$p(x) = x^2 - 2x$, $p(2{,}5) =$	Ich setze das Argument $x = 2{,}5$ in die Funktionsgleichung $p(x) = x^2 - 2x$ ein und erhalte y. $p(2{,}5) = 2{,}5^2 - 2 \cdot 2{,}5 = 6{,}25 - 5 = 1{,}25$
	Stelle berechnen
$p(x) = 0$ Ansatz für Nullstelle	Ich setze den Funktionsterm gleich 0. Die Lösungen sind die Nullstellen. Das sind die Stellen, an denen der Funktionsterm den Wert $y = 0$ hat. In den entsprechenden Punkten schneidet der Graph von p die x-Achse.
$p(x) = 3$ Ansatz für Stelle mit diesem Wert	Ich setze den Funktionsterm gleich 3. Die Lösungen der Gleichung $x^2 - 2x = 3$ sind die Stellen, an denen der Funktionsterm den Wert $y = 3$ hat.
$g(x) = p(x)$ Ansatz für Schnittpunkte, ergibt Stelle, für Wert in Funktionsterm einsetzen	Ich setze die Funktionsterme von g und von p gleich. Die Lösung der Gleichung $x = x^2 - 2x$ ist die Stelle, an der beide Funktionsterme den gleichen Wert haben. Wenn ich die Lösung in einen der beiden Funktionsterme einsetze, erhalte ich die y-Koordinate des Punktes, in dem sich beide Graphen schneiden. Im Beispiel gibt es zwei Schnittpunkte, an den Stellen $x = 0$ und $x = 2$.
	Funktionsgleichung bestimmen
Der Verlauf einer Geraden ist eindeutig bestimmt durch: zwei geeignete Punkte *oder* durch einen Punkt und die Steigung. Der Verlauf einer Parabel ist eindeutig bestimmt durch drei geeignete Punkte.	
$f(x) = m \cdot x + b$	Ich muss den Achsenabschnitt und die Steigung ablesen bzw. berechnen können – dies wird in einem anderen Aufgabenset eingehend geübt.
$f(x) = (x - d)^2 + e$	Ich muss die Gleichung einer Parabel in Scheitelpunktform angeben können – dies wird in einem anderen Aufgabenset eingehend geübt.