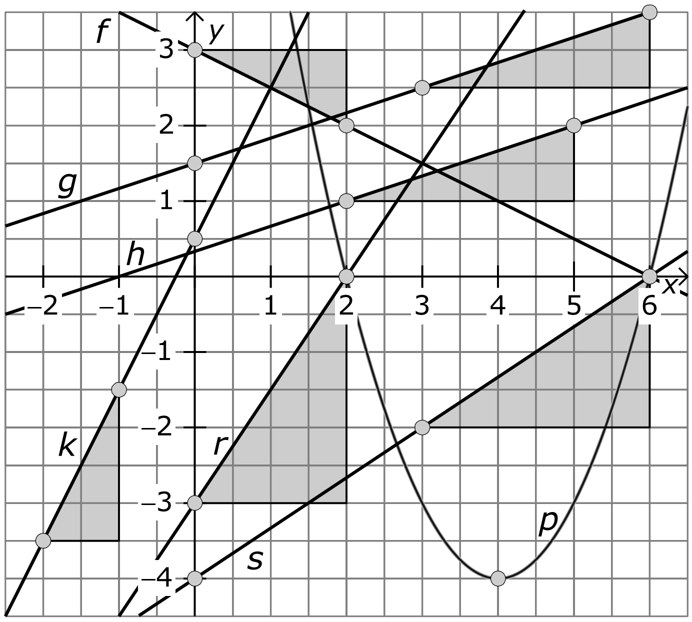
Aufgabenset 3 „Funktionen"

Wähle mindestens fünf der folgenden Aufgaben aus und bearbeite sie.
Für die Bearbeitung hast du 20 min Zeit – bitte in Einzelarbeit.

1) Die abgebildeten Geraden treffen das Gitternetz in den markierten Punkten.

Wähle mindestens drei Geraden aus und gib deren Funktionsgleichungen an.



2) Leonie zeichnet eine Gerade ohne dafür eine Wertetabelle anzulegen.

Leonie zählt vom Ursprung des Koordinatensystems (0 | 0) aus auf der *y*-Achse **4 Längeneinheiten nach unten** ab und markiert den ***y*-Achsenabschnitt**. Vom Punkt Y (0 | –4) aus zeichnet Leonie ein **Steigungsdreieck**: **5 Längeneinheiten nach rechts, 4 Längeneinheiten nach oben**.

Gib den Funktionsterm der Geraden an, die Leonie gezeichnet hat.

3) Gib eine Funktionsgleichung für die Parabel *p* an.
Gib den Schnittpunkt der Parabel *p* mit der *y*-Achse an.

4) Zeichne die Geraden $u(x) = \frac{4}{5}x - 4$ und $v(x) = -\frac{5}{4}x + 2$. Wähle eine dieser Geraden aus und berechne ihren Schnittpunkt mit der *x*-Achse.

5) Berechne den Schnittpunkt der Geraden $u(x) = \frac{4}{5}x - 4$ und $t(x) = -x + \frac{1}{2}$.

6) Marvin mag die Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Er fragt seinen Lehrer, ob es auch eine *m*-*b*-Formel gibt, mit der man den Schnittpunkt der Geraden $f(x) = m \cdot x + b$ mit der *x*-Achse bestimmen kann.

Gib eine solche "Lösungsformel" für die Gleichung $m \cdot x + b = 0$ an. Nenne die Voraussetzung dafür, dass man diese "Formel" sinnvoll anwenden kann.

7) Die Funktionsterme von *r* und von *s* werden multipliziert. Mit $r(x) \cdot s(x)$ erhält man den Funktionsterm für die Parabel *p*. Erkläre, warum die Parabel durch die Schnittpunkte der beiden Geraden mit der *x*-Achse verläuft.

8) $p(x) = r(x) \cdot s(x)$. Weder *r* noch *s* haben die Steigung 1. Erkläre, warum *p* dennoch eine verschobene Normalparabel mit dem Faktor 1 vor x^2 ist.

9) Weise nach, z. B. mit Hilfe der Steigungsdreiecke, dass die beiden Geraden $u(x) = \frac{4}{5}x - 4$ und $v(x) = -\frac{5}{4}x + 2$ sich exakt im rechten Winkel schneiden.

10) Man kann aus den Geradengleichungen ablesen, ob zwei Geraden sich im rechten Winkel schneiden. Formuliere eine Regel. Wende sie auf *f* und *k* an.

Hilfsmittel: Taschenrechner, auch zum Lösen von Gleichungen und für Wertetabellen; Formelsammlung

Lösungen zum Aufgabenset 3 „Funktionen "

Vergleiche deine Lösungen mit dem Lösungsblatt. Dafür hast du 5 min Zeit. Überlege dir, welche Aufgaben zusätzlich an der Tafel besprochen werden sollen.

1) Die abgebildeten Geraden treffen in den markierten Punkten das Gitternetz. Gib drei der Funktionsgleichungen an.

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

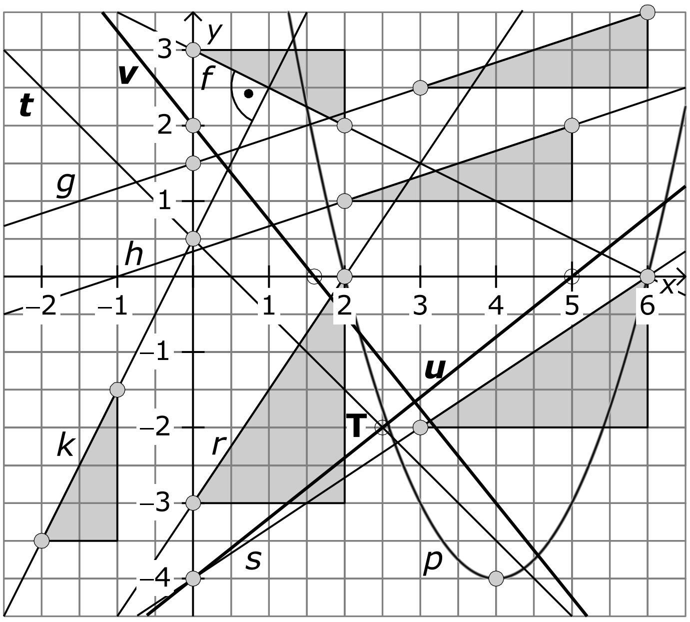
$g(x) = \frac{1}{3}x + 1{,}5$

$h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$, siehe *

$k(x) = 2x + 0{,}5$

$r(x) = \frac{3}{2}x - 3$

$s(x) = \frac{2}{3}x - 4$



* Den Achsenabschnitt von *h* kann man mit einem Steigungsdreieck bestimmen: *g* und *h* sind parallel, haben also die gleiche Steigung $\frac{1}{3}$. Geht man auf *h* vom Punkt (−1 | 0) aus eine Einheit nach rechts zur *y*-Achse, muss man $\frac{1}{3}$ Einheit nach oben gehen, um wieder einen Punkt auf *h* zu treffen.

2) Leonie zeichnet die Gerade mit dem Funktionsterm $\frac{4}{5}x - 4$, siehe Gerade ***u***.

3) *p* ist eine verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt (4 | −4).
$p(x) = (x-4)^2 - 4 = x^2 - 8x + 16 - 4 = x^2 - 8x + 12$. Aus der Normalform liest man $p(0) = 12$ ab. Die Parabel schneidet die *y*-Achse in (0 | 12).

4) Zeichnung: siehe Graphen ***u*** und ***v***.

$$u(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{4}{5}x - 4 = 0 \quad | + 4$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{4}{5}x = 4 \quad | : \frac{4}{5}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 5$$

u schneidet die *x*-Achse im Punkt (5 | 0).

$$v(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -\frac{5}{4}x + 2 = 0 \quad | - 2$$
$$\Leftrightarrow \quad -\frac{5}{4}x = -2 \quad | : \left(-\frac{5}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{8}{5}$$

v schneidet die *x*-Achse im Punkt (1,6 | 0).

5) Ansatz: $u(x) = t(x)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4}{5}x - 4 = -x + \frac{1}{2} \quad | + 4$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{4}{5}x = -x + 4{,}5 \quad | + x$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{9}{5}x = 4{,}5 \quad | : \frac{9}{5}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Lösung in $t(x)$ einsetzen: $t(2{,}5) = -2{,}5 + \frac{1}{2}$
$= -2$

zur Kontrolle (*nicht unbedingt notwendig*) Lösung $x = 2{,}5$ auch in $u(x)$ einsetzen:

$$u\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{2} - 4 = 2 - 4 = -2$$

Der Schnittpunkt **T** von *u* und *t* ist (2,5 | −2).

Lösungen zum Aufgabenset 3 „Funktionen "

Vergleiche deine Lösungen mit dem Lösungsblatt. Dafür hast du 5 min Zeit. Überlege dir, welche Aufgaben zusätzlich an der Tafel besprochen werden sollen.

6)

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & m \cdot x + b = 0 \quad \big| -b \\ \Leftrightarrow\quad & m \cdot x = -b \quad \big| : m \\ \Leftrightarrow\quad & x = -\tfrac{b}{m} \end{aligned}$$

Die Gerade $f(x) = m \cdot x + b$ schneidet die x-Achse an der Stelle $x = -\frac{b}{m}$. Dabei muss $m \neq 0$ sein. Eine Gerade mit der Steigung 0 wäre parallel zur x-Achse und könnte diese nicht in einem Punkt schneiden. Nur für $b = 0$ und $m = 0$ würde die Gerade genau auf der x-Achse verlaufen.

7) $p(x) = r(x) \cdot s(x) = \left(\frac{3}{2}x - 3\right) \cdot \left(\frac{2}{3}x - 4\right)$. An der Stelle $x = 2$ nimmt die erste Klammer den Wert 0 an. Damit wird auch $p(2) = 0$. An der Stelle $x = 6$ nimmt die zweite Klammer den Wert 0 an. Damit wird auch $p(6) = 0$.

8) $p(x) = r(x) \cdot s(x) = \left(\frac{3}{2}x - 3\right) \cdot \left(\frac{2}{3}x - 4\right) = \frac{3}{2}x \cdot \frac{2}{3}x - 4 \cdot \frac{3}{2}x - 3 \cdot \frac{2}{3}x - 3 \cdot (-4)$.

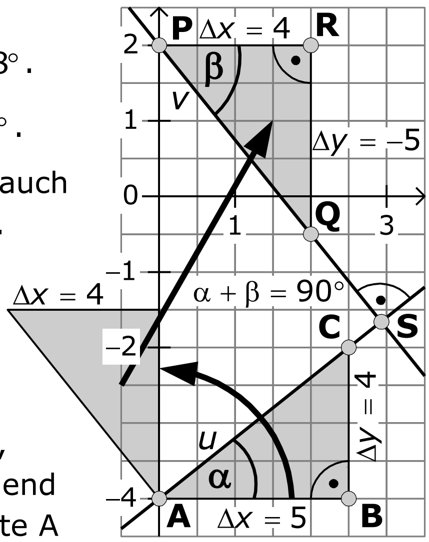
$\frac{3}{2}$ und $\frac{2}{3}$ sind Kehrwerte voneinander. Ihr Produkt wird $\frac{3}{2}x \cdot \frac{2}{3}x = 1 \cdot x^2$.

9) **Rechnung:**

Im Dreieck ABC ist $\tan\alpha = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 38{,}6598°$.

Im Dreieck PQR ist $\tan\beta = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 51{,}3402°$.

Die beiden Steigungswinkel α und β kann man auch im Punkt S antragen. Sie ergänzen sich zu 90°.



Geometrische Argumentation:

Wir messen Höhe und Breite der Steigungsdreiecke in Rechenkästchen. Das Dreieck ABC hat die Höhe $\Delta y = 4$. Dabei steht Δy (lies: "*Delta-y*") für die Differenz der beiden y-Werte, den vertikalen Abstand von C und B. Entsprechend gibt $\Delta x = 5$ den horizontalen Abstand der Punkte A und B an. Das Dreieck ABC wird um 90° gegen den Uhrzeigersinn um den Punkt A gedreht. Das gedrehte Dreieck hat die Höhe 5 und die Breite 4. Verschiebt man dieses Dreieck um 2 cm nach rechts und um 3,5 cm nach oben, dann deckt es sich mit dem Steigungsdreieck PQR. Also ist $v \perp u$.

10) In **9)** haben wir nur den Betrag der Differenz Δy betrachtet. In **10)** muss jedoch berücksichtigt werden, dass eine der beiden Steigungen negativ ist.

Regel: Zwei Geraden schneiden sich im rechten Winkel, wenn eine Steigung der negative Kehrwert der anderen ist, also $m_1 = \frac{-1}{m_2}$.

anders formuliert: Zwei Geraden schneiden sich im rechten Winkel, wenn das Produkt ihrer Steigungen −1 ist, also $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Anwendungsbeispiel: Die Geraden $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ und $k(x) = 2x + 0{,}5$ haben die Steigungen $m_1 = -\frac{1}{2}$ und $m_2 = 2$. Weil $m_1 \cdot m_2 = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$ ist, schneiden sich die Geraden im rechten Winkel.

Was kannst du aus diesen Übungsaufgaben lernen? Was solltest du für den MSA über Funktionen wissen, was solltest du können?

Inhalte des Aufgabensets 3 „Funktionen ”

	Geradengleichung aus der Zeichnung ablesen
$f(x) = m \cdot x + b$ $f(0) = b$ $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$	Wenn die Gerade die y-Achse in einem Gitternetzpunkt schneidet, kann ich dort den Achsenabschnitt b unmittelbar ablesen. Wenn die Gerade zwei Gitternetzpunkte exakt trifft, kann ich die Höhe und die Breite des Steigungsdreiecks in Rechenkästchen abzählen. Δy ist die Höhe des Steigungsdreiecks. Δx ist die Breite des Steigungsdreiecks. $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ **Achtung:** Wenn ich von links nach rechts gehe und die Gerade dabei nach unten verläuft, wird Δy und damit auch m negativ.
	Geradengleichung rechnerisch bestimmen
$f(x) = m \cdot x + b$ $P(x_1 \mid y_1)$ $Q(x_2 \mid y_2)$	Wenn die Gerade zwei Punkte P und Q exakt trifft, kann ich aus deren Koordinaten m und b rechnerisch bestimmen. Beispiel: P (2 | 4) und Q (5 | 3) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-4}{5-2} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$ Für den Punkt P muss gelten: $f(2) = 4$, also $m \cdot 2 + b = 4$. Da die Steigung m bekannt ist, kann ich den Achsenabschnitt b berechnen. $-\frac{1}{3} \cdot 2 + b = 4 \quad \Rightarrow \quad b = 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{14}{3}$
	Stelle berechnen
$p(x) = 0$ Ansatz für Nullstelle	Ich setze den Funktionsterm gleich 0. Die Lösungen sind die Nullstellen. Das sind die Stellen, an denen der Funktionsterm den Wert $y = 0$ hat. In den entsprechenden Punkten schneidet der Graph von p die x-Achse.
$u(x) = t(x)$ Ansatz für Schnittpunkte, ergibt Stelle, für Wert in Funktionsterm einsetzen	Ich setze die Funktionsterme von u und von t gleich. Die Lösung der Gleichung $\frac{4}{5}x - 4 = -x + \frac{1}{2}$ ist die Stelle, an der beide Funktionsterme den gleichen Wert haben. Wenn ich die Lösung in einen der beiden Funktionsterme einsetze, erhalte ich die y-Koordinate des Punktes, in dem sich beide Graphen schneiden. Im Beispiel ist der Schnittpunkt (2,5 | –2).
	Satz vom Nullprodukt
Ein Produkt wird 0, wenn einer der Faktoren den Wert 0 hat. In Aufgabe **7)** nimmt die erste Klammer $\left(\frac{3}{2}x - 3\right)$ an der Stelle $x = 2$ den Wert 0 an. Die zweite Klammer $\left(\frac{2}{3}x - 4\right)$ nimmt an der Stelle $x = 6$ den Wert 0 an. Das Produkt der beiden Klammern nimmt an beiden Stellen, 2 und 6, den Wert 0 an.	