**Aufgabenset 6 „Funktionen"**

Wähle mindestens fünf der folgenden Aufgaben aus und bearbeite sie.
Für die Bearbeitung hast du 20 min Zeit – bitte in Einzelarbeit.

**1)** $g(x) = 2x + 3$, $h(x) = 2x - 1$, $k(x) = 0{,}5x + 3$. Zwei der drei Geraden haben den gleichen Achsenabschnitt, zwei haben die gleiche Steigung.

**a)** Gib die Gleichung einer vierten Geraden *p* so an, dass es je zwei parallele Geraden gibt. Wie kannst du erreichen, dass es auch je zwei Geraden mit dem gleichen *y*-Achsenabschnitt gibt?

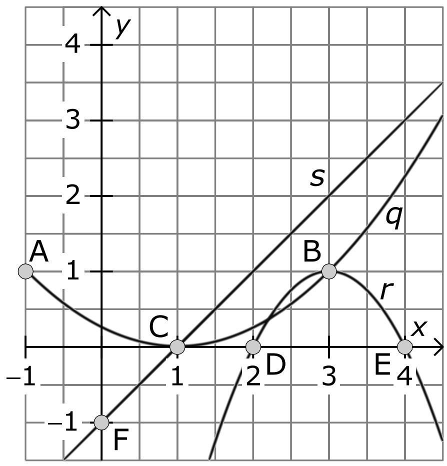
**b)** Die drei Geraden *g*, *h* und *k* haben zwei Schnittpunkte.
Bestimme diese Schnittpunkte.

**2)** Die Koordinaten der Punkte A, B, C, D, E und F sind ganze Zahlen.
Die Graphen *r*, *s* und *q* treffen die jeweils markierten Punkte exakt.

**a)** Gib die Funktionsgleichungen von *s* und von *r* an.

**b)** Erläutere dein Vorgehen in Stichworten.

**c)** Bestimme die Funktionsgleichung von *q*.




**3)** Gib die Gleichung einer verschobenen Normalparabel an, die durch die Punkte A und B geht.

**4)** Begründe: Der Scheitelpunkt jeder Parabel, die durch die Punkte A und B geht, muss an der Stelle $x = 1$ liegen.

**5)** Die Graphen von *s* und *q* schneiden sich im Punkt C und in einem zweiten Punkt. Bestimme den zweiten Schnittpunkt.

**6)** Man sieht, dass C der Scheitelpunkt von *q* ist.
Begründe: Unter dieser Voraussetzung genügt es, die Koordinaten von A zu kennen, um die Funktionsgleichung zu bestimmen.

**7)** Im abgebildeten Bereich verläuft die Gerade *s* für $x > 1$ oberhalb der Parabel *q*. Bestimme den größten vertikalen Abstand der beiden Graphen.

**8)** $r(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Koordinaten ( 2 | 0 ) von Punkt D einsetzen: $r(2) = 0 \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 0$

Stelle die entsprechende Gleichung für den Punkt E auf.

Stelle die entsprechende Gleichung für den Punkt B auf.

**9)** $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ und $f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$

Gib jeweils an, wie man diese Form der Parabelgleichung nennt.
Gib den Zusammenhang zwischen den Faktoren *a*, *b*, *c*, *d* und *e* an.

**10)** Stelle wie in **8)** Gleichungen für *q* auf und löse das Gleichungssystem.

Hilfsmittel: Taschenrechner, auch zum Lösen von Gleichungen und für Wertetabellen; Formelsammlung

**Lösungen zum Aufgabenset 6 „Funktionen "**

Vergleiche deine Lösungen mit dem Lösungsblatt. Dafür hast du 5 min Zeit. Überlege dir, welche Aufgaben zusätzlich an der Tafel besprochen werden sollen.

| | |
|---|---|
| **1a)** | Die Gerade $p(x) = 0{,}5x - 1$ ist parallel zu $k$ und hat den gleichen $y$-Achsenabschnitt wie $h$. |
| **b)** | Aus dem $y$-Achsenabschnitt liest man ab, dass sich $g$ und $k$ auf der y-Achse im Punkt ( 0 \| 3 ) schneiden. $g$ und $h$ sind parallel, sie schneiden sich nicht.<br>$h(x) = k(x)$<br>$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0{,}5x + 3 \,\vert\, +1;\, -0{,}5x$<br>$\Leftrightarrow 1{,}5x = 4 \,\vert\, :\frac{3}{2}$<br>$\Leftrightarrow x = \frac{8}{3} = 2{,}\overline{3}$<br>Die Geraden $h$ und $k$ schneiden sich im Punkt $\left(2{,}\overline{3} \,\middle\vert\, 8{,}\overline{3}\right)$<br>Einsetzen: $h\left(\frac{8}{3}\right) = 2 \cdot \frac{8}{3} + 3 = \frac{16}{3} + \frac{9}{3} = \frac{25}{3} = 8{,}\overline{3}$ |
| **2a)** | $s(x) = x - 1$ und $r(x) = -(x-3)^2 + 1$ |
| **b)** | $s$ schneidet $y$-Achse in F ( 0 \| –1 ), deshalb $b = -1$.<br>Von F ( 0 \| –1 ) nach C ( 1 \| 0 ) eine Einheit nach rechts und eine Einheit nach oben, deshalb $m = 1$.<br>Parabel nach unten geöffnet, deshalb $a$ negativ. B ( 3 \| 1 ) ist Scheitelpunkt, deshalb $d = 3$ und $e = 1$.<br>Vom Scheitelpunkt B ( 3 \| 1 ) nach E ( 4 \| 0 ) eine Einheit nach rechts und eine Einheit nach unten, deshalb $a = -1$. |
| **c)** | **Hinweis:** Eine formale Rechnung wird in der Lösung von **10)** ausgeführt.<br>Hier soll die Funktionsgleichung durch Überlegungen bestimmt werden, die nur anwendbar sind, weil der Scheitelpunkt der Parabel bekannt ist.<br>Die Parabel ist gestaucht und nach oben geöffnet. Weil der Scheitelpunkt C ( 1 \| 0 ) ist, muss $d = 1$ und $e = 0$ sein. Die Funktionsgleichung hat die Form $q(x) = a \cdot (x-1)^2 + 0$. B liegt zwei Einheiten rechts und eine Einheit oberhalb von C. Bei der verschobenen Normalparabel $n(x) = 1 \cdot (x-1)^2$ wäre $n(3) = 4$. Weil $q(3) = 1$ ist, muss $a = 0{,}25$ sein. Also ist $q(x) = 0{,}25 \cdot (x-1)^2$. |
| **3)** | $v(x) = (x-1)^2 - 3$ oder $u(x) = -(x-1)^2 + 5$ ("*4 tiefer oder 4 höher als A*") |
| **4)** | Die Punkte A und B haben beide die $y$-Koordinate 1, sie "*liegen gleich hoch*". Alle Parabeln sind achsensymmetrisch zu einer vertikalen Geraden, die durch den Scheitelpunkt geht. Die Mitte zwischen $x = -1$ und $x = 3$, also zwischen den Stellen, an denen die Punkte A und B liegen, ist $x = 1$. An dieser Stelle muss der Scheitelpunkt jeder Parabel liegen, die durch A und B geht. |
| **5)** | $s(x) = q(x)$<br>$\Leftrightarrow x - 1 = 0{,}25 \cdot (x-1)^2$<br>$\Leftrightarrow 4x - 4 = x^2 - 2x + 1$<br>$\Leftrightarrow 0 = x^2 - 6x + 5 = (x-1) \cdot (x-5)$<br>$\Leftrightarrow x = 1$ oder $x = 5$<br>Weil $x = 1$ eine Lösung ist, siehe Punkt C, muss in der vorletzten Zeile der Linearfaktor $(x-1)$ enthalten sein. Statt der quadratischen Ergänzung oder der Lösungsformel kann man den Satz von Vieta anwenden: $-1 \cdot (-5) = 5$; $1 + 5 = 6$. |

**Lösungen zum Aufgabenset 6 „Funktionen "**

Vergleiche deine Lösungen mit dem Lösungsblatt. Dafür hast du 5 min Zeit. Überlege dir, welche Aufgaben zusätzlich an der Tafel besprochen werden sollen.

**..5)** Einsetzen der Lösung $x = 5$, z. B. $s(5) = 4$, ergibt den Schnittpunkt ( 5 | 4 ).

**Bestimmung durch eine Überlegung:** Mit der Steigung 1 geht die Gerade von C ( 1 | 0 ) aus vier Einheiten nach rechts und vier Einheiten nach oben. Auch die mit dem Faktor 0,25 gestauchte Parabel geht vom Scheitelpunkt aus vier Einheiten nach rechts und vier Einheiten nach oben.

**6)** Wenn C ( 1 | 0 ) der Scheitelpunkt von $q$ ist, dann verläuft die Symmetrieachse der Parabel vertikal durch C. Wenn der Punkt B ( 3 | 1 ) auf der Parabel liegt, dann muss der zu B symmetrisch liegende Punkt ( –1 | 1 ) ebenfalls zur Parabel gehören. Damit sind drei Punkte bekannt, was genügt, um die Funktionsgleichung eindeutig zu bestimmen.

**7)** **Überlegung:** In den beiden Schnittpunkten C ( 1 | 0 ) und ( 5 | 4 ) ist der Abstand 0. In der Mitte zwischen den Stellen 1 und 5, an der Stelle $x = 3$, muss der Abstand am größten sein.

Die Funktionswerte an dieser Stelle sind $s(3) = 2$ und $q(3) = 1$.

Der vertikale Abstand ist 1.

**Rechnung:**

$$\begin{aligned} s(x) - q(x) &= x - 1 - 0{,}25 \cdot (x-1)^2 \\ &= x - 1 - (0{,}25x^2 - 0{,}5x + 0{,}25) \\ &= -0{,}25x^2 + 1{,}5x - 1{,}25 \\ &= -0{,}25 \cdot (x-3)^2 + 1 \end{aligned}$$

Die Differenzfunktion hat ihren Scheitelpunkt an der Stelle $x = 3$. Der größte Funktionswert (größte Differenz) ist 1.

**8)** $r(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Koordinaten ( 2 | 0 ) von Punkt D einsetzen: $r(2) = 0 \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 0$

Koordinaten ( 4 | 0 ) von Punkt E einsetzen: $r(4) = 0 \Rightarrow a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 0$

Koordinaten ( 3 | 1 ) von Punkt B einsetzen: $r(3) = 1 \Rightarrow a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 1$

**9)** allgemeine Form $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Scheitelpunktform $f(x) = a \cdot (x-d)^2 + e$

$a \cdot (x-d)^2 + e = a \cdot (x^2 - 2 \cdot d \cdot x + d^2) + e = a \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot x + a \cdot d^2 + e$

Der Stauchungsfaktor $a$ hat in beiden Gleichungen den gleichen Wert.

Beim Vergleichen kann man ablesen: $b = -2ad$ und $c = ad^2 + e$.

**10)** Koordinaten ( –1 | 1 ) von A: $q(-1) = 1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 1$

Koordinaten ( 1 | 0 ) von C: $q(4) = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0$

Koordinaten ( 3 | 1 ) von B: $q(3) = 1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 1$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{I} & a - b + c = 1 \\ \mathbf{II} & a + b + c = 0 \\ \mathbf{III} & 9a + 3b + c = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \mathbf{I} & a - b + c = 1 \\ \mathbf{II} & a + b + c = 0 \\ \mathbf{I} - \mathbf{II} & 0 - 2b + 0 = 1 \end{array} \Rightarrow b = -0{,}5 \Rightarrow \begin{array}{ll} \mathbf{II} & a - 0{,}5 + c = 0 \\ 9 \cdot \mathbf{II} & 9a - 4{,}5 + 9c = 0 \\ \mathbf{III} & 9a - 1{,}5 + c = 1 \end{array}$$

$$9 \cdot \mathbf{II} - \mathbf{III} \Rightarrow 0 - 3 + 8c = -1 \Rightarrow 8c = 2 \Rightarrow c = 0{,}25$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung $a = 0{,}25$ und $b = -0{,}5$ und $c = 0{,}25$.