Aufgabenset 7 „Funktionen"

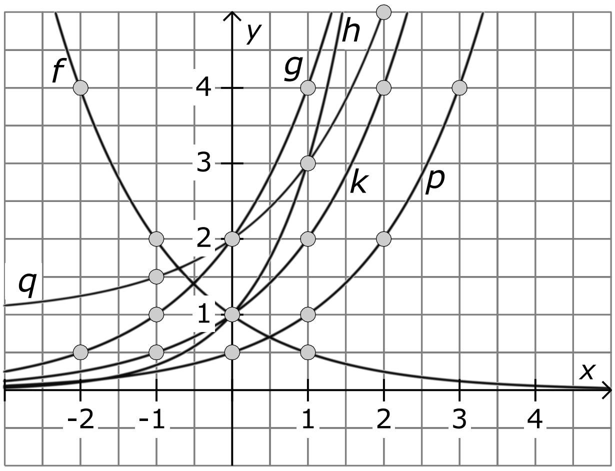
Wähle mindestens fünf der folgenden Aufgaben aus und bearbeite sie.
Für die Bearbeitung hast du 20 min Zeit – bitte in Einzelarbeit.

1) ___ $(x) = 2^x$ ___ $(x) = 3^x$

___ $(x) = 2^{-x}$ ___ $(x) = 2 \cdot 2^x$

___ $(x) = 0{,}5^x$ ___ $(x) = 2^{x+1}$

___ $(x) = 2^x + 1$



Die Terme sollen den Graphen zugeordnet werden. In den markierten Punkten trifft der entsprechende Graph exakt einen Gitternetzpunkt.
Zu einigen Graphen passen mehrere Terme. Ein Graph bleibt übrig.

a) Notiere bei mindestens fünf Funktionstermen die Bezeichnung des Graphen.

b) Gib den fehlenden Funktionsterm für den übriggebliebenen Graphen an.

2) Die Wertetabelle ist unvollständig. Ergänze mindestens fünf Werte.

x		-2	-1	0	1	2	3	4		7
2^x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$		1	2	4	8		$16 \cdot \sqrt{2}$	
$x^2 - x + 2$	22		4	2	2	4	8	14	$17{,}75$	
	-13		-4		2	5	8	11		

3) Ergänze in der Wertetabelle zu **2)** den Funktionsterm für die unterste Zeile.

4) Vergleiche den Graphen von $f(x) = c \cdot a^x$ mit $e(x) = a^x$ für $c = 0{,}5$.

5) Vergleiche den Graphen von $g(x) = a^x + b$ mit $e(x) = a^x$ für $b = 0{,}5$.

6) Arman sagt: „In der Tabelle ist mir 'was aufgefallen! 2 liegt doch genau in der Mitte zwischen 1 und 3. Und in der untersten Zeile liegt der Funktionswert zu 2 auch genau in der Mitte zwischen 2 und 8, nämlich bei 5. Ich zähle 2 und 8 zusammen und teile die Summe 10 durch 2, das macht 5. Und bei der Exponentialfunktion multipliziere ich die beiden Zahlen, das macht 16. Ich ziehe die Wurzel aus 16, das macht 4."

1,5 liegt in der Mitte zwischen 1 und 2. Nutze Armans Idee und bestimme damit in der untersten Zeile den Funktionswert zu $x = 1{,}5$.

7) 1,5 liegt in der Mitte zwischen 1 und 2. Nutze Armans Idee und bestimme damit $2^{1{,}5}$. Überprüfe das Ergebnis mit der Funktionsgleichung.

8) 10 000 Euro werden zu 0,75% mit Zinsenzinsen verzinst.
Bestimme das Kapital nach 10 Jahren.

9) Bestimme zu **8)** die Laufzeit für eine Verdoppelung des Kapitals.

10) Der Graph von $f(x-1)$ ist gegenüber $f(x)$ seitlich verschoben. Erkläre damit den Zusammenhang zwischen den Graphen g, k und p in Aufgabe **1)**.

Hilfsmittel: Taschenrechner, auch zum Lösen von Gleichungen und für Wertetabellen; Formelsammlung

Lösungen zum Aufgabenset 7 „Funktionen "

Vergleiche deine Lösungen mit dem Lösungsblatt. Dafür hast du 5 min Zeit. Überlege dir, welche Aufgaben zusätzlich an der Tafel besprochen werden sollen.

1a) $k(x) = 2^x$

$h(x) = 3^x$

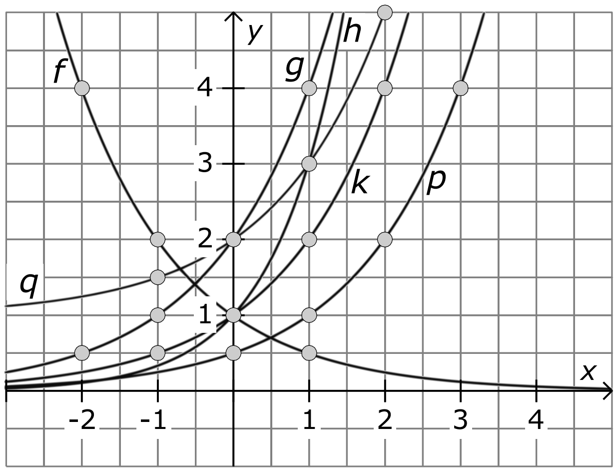
$f(x) = 2^{-x}$

$g(x) = 2 \cdot 2^x$

$f(x) = 0{,}5^x$

$g(x) = 2^{x+1}$, weil $2 \cdot 2^x = 2^{x+1}$

$q(x) = 2^x + 1$

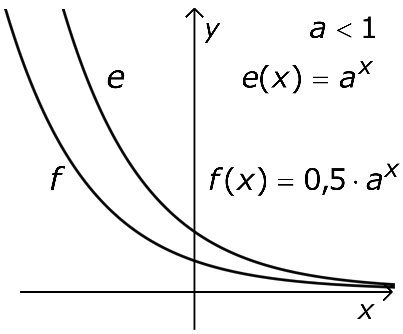


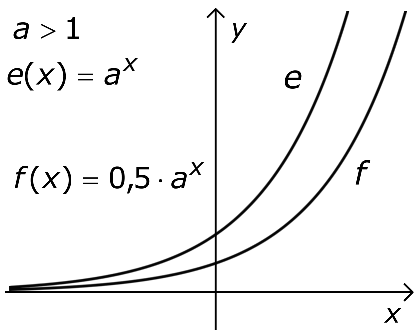
b) $p(x) = 0{,}5 \cdot 2^x$ oder $q(x) = 2^{x-1}$, weil $0{,}5 = 2^{-1}$ und $2^{-1} \cdot 2^x = 2^{x-1}$

2) und **3)**

x	**−4**	−2	−1	0	1	2	3	4	**4,5**	7
2^x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	**16**	$16 \cdot \sqrt{2}$	**128**
$x^2 - x + 2$	22	**8**	4	2	2	4	8	14	17,75	**44**
$3x - 1$	−13	**−7**	−4	**−1**	2	5	8	11	**12,5**	**20**

4) Der Graph von $f(x) = c \cdot a^x$ ist im Vergleich zum Graphen von $e(x) = a^x$ gestaucht. Da $c = 0{,}5$ ist, sind alle Funktionswerte von f an der gleichen Stelle nur halb so groß wie die von e.

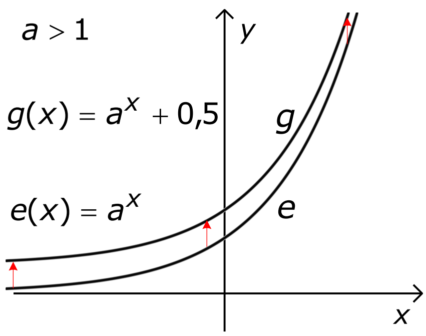




Falls $a < 1$ ist, nähern sich beide Graphen für sehr große x-Werte immer mehr an die x-Achse an.

Falls $a > 1$ ist, findet diese asymptotische Annäherung für sehr kleine x-Werte (also negative Zahlen mit großem Betrag) statt.

5) Der Graph von $g(x) = a^x + b$ ist im Vergleich zum Graphen von $e(x) = a^x$ um 0,5 Längeneinheiten nach oben verschoben.



Lösungen zum Aufgabenset 7 „Funktionen ”

Vergleiche deine Lösungen mit dem Lösungsblatt. Dafür hast du 5 min Zeit. Überlege dir, welche Aufgaben zusätzlich an der Tafel besprochen werden sollen.

<table>
<tr>
<td>

6) <u>Armans Überlegung für x = 1 und x = 3</u>

Die Zahl 2 steht genau in der Mitte zwischen den Zahlen 1 und 3.

Rechnung: $\frac{1}{2}\cdot(1+3)=\frac{1}{2}\cdot 4=2$.

Die lineare Funktion in der untersten Zeile soll w heißen. $w(x)=3x-1$.

In der Mitte von 1 und 3, also bei x = 2, ist der Funktionswert genau in der Mitte zwischen den Funktions-werten $w(1)=2$ und $w(3)=8$.

Bei 2, in der Mitte von 1 und 3, ist der Funktionswert von w also

$\frac{1}{2}\cdot\left(w(1)+w(3)\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(2+8\right)=5$.

Kontrolle: $w(2)=3\cdot 2-1=5$

</td>
<td>

<u>Anwendung auf x = 1 und x = 2</u>

Der <u>arithmetische Mittelwert</u> von 1 und 2 ist 1,5.

Rechnung: $\frac{1}{2}\cdot(1+2)=\frac{1}{2}\cdot 3=1{,}5$.

Die lineare Funktion in der untersten Zeile soll w heißen. $w(x)=3x-1$.

Den Funktionswert in der Mitte zwischen 1 und 2 kann man mit dem <u>arithmetischen Mittelwert</u> aus $w(1)=2$ und $w(2)=5$ bestimmen.

Der Funktionswert von w an der Stelle 2 in der Mitte von 1 und 3 ist

$\frac{1}{2}\cdot\left(w(1)+w(2)\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(2+5\right)=3{,}5$.

Kontrolle: $w(1{,}5)=3\cdot 1{,}5-1=3{,}5$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

7) <u>Armans Überlegung für x = 1 und x = 3</u>

Die Exponentialfunktion ist $k(x)=2^x$.

Den Funktionswert in der Mitte zwischen 1 und 3 kann man durch Multiplizieren von $k(1)=2$ und $k(3)=8$ sowie Wurzelziehen aus dem Produkt bestimmen. $\sqrt{k(1)\cdot k(3)}=\sqrt{2\cdot 8}=4$

Kontrolle: $k(2)=2^2=4$

</td>
<td>

<u>Anwendung auf x = 1 und x = 2</u>

Die Exponentialfunktion ist $k(x)=2^x$.

Den Funktionswert in der Mitte zwischen 1 und 2 kann man mit dem <u>geometrischen Mittelwert</u> aus $k(1)=2$ und $k(2)=4$ bestimmen.

$\sqrt[2]{k(1)\cdot k(2)}=\sqrt[2]{2\cdot 4}=2\cdot\sqrt{2}\approx 2{,}8$

Kontrolle: $k(1{,}5)=2^{1{,}5}=2\cdot\sqrt{2}\approx 2{,}8$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

8) $10\,000\text{ €}\cdot\left(1+\frac{0{,}75}{100}\right)^{10}=10\,000\text{ €}\cdot 1{,}0075^{10}\approx 10\,000\text{ €}\cdot 1{,}077583=10\,775{,}83\text{ €}$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

9) $G_n=2\cdot G_0$, d.h. $2=\left(1+\frac{0{,}75}{100}\right)^n$.

Mit dem Logarithmus zur Basis 1,0075 gerechnet: $n=\log_{1{,}0075}(2)\approx 92{,}77$

Mit Logarithmengesetzen gerechnet: $n=\dfrac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(1{,}0075)}\approx\dfrac{0{,}3010}{3{,}245\cdot 10^{-3}}=92{,}76$

Probierverfahren: $1{,}0075^{92}\approx 1{,}9886$, $1{,}0075^{93}\approx 2{,}0035 \quad\Rightarrow\quad 92<n<93$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

10) $k(x)=2^x$ und $p(x)=0{,}5\cdot 2^x$. Man setzt $x-1$ in die Funktion k ein:

$k(x-1)=2^{x-1}=2^x\cdot 2^{-1}=2^x\cdot 0{,}5=0{,}5\cdot 2^x=p(x)$. Der Graph von $k(x-1)$ ist um eine Längeneinheit nach rechts gegenüber dem Graphen von $k(x)$ verschoben. Die Graphen von $k(x-1)$ und von $p(x)$ stimmen überein.

Analog: $k(x+1)=2^{x+1}=2^x\cdot 2^1=2^x\cdot 2=2\cdot 2^x=g(x)$. Man verschiebt den von $k(x)$ nach links und erhält mit $k(x+1)$ zugleich den Graphen von $g(x)$.

</td>
</tr>
</table>