Unterrichtsbeispiel Quadratwurzeln (Leitfaden Seite 31)

Der Einstieg in das Thema Quadratwurzeln könnte beispielsweise so gestaltet werden, dass die Lehrkraft zunächst lediglich $\sqrt{49}$ an die Tafel schreibt. Vorkenntnisse aus der Lerngruppe werden zusammengetragen, ggf. von der Lehrkraft ergänzt und etwa in der hier dargestellten Form notiert.

Quadratwurzeln

$\sqrt{49}$

Quadratwurzel — Radikand

$\sqrt{49}$ liest man „Wurzel aus 49“ oder „Quadratwurzel aus 49“.

$\sqrt{49} = 7$, weil $7 \cdot 7 = 49$ ist.

Diese vorläufige Definition genügt vorerst. Das Gespräch soll kurz gehalten werden um zügig zur Arbeit mit der eigentlichen Lernaufgabe überzugehen. Eine exakte Definition der Quadratwurzel erfolgt später. Nun stellt die Lehrkraft als Einstieg in das Thema die folgende Aufgabe.

passende Ziffern für die Wurzeln

Das Symbol □ steht eine beliebige Ziffer. In die Kästchen können also verschiedene oder auch gleiche Ziffern eingetragen werden. Finde jeweils passende Ziffern.

a) $\sqrt{□} = □$	**b)** $\sqrt{□□} = □$	**c)** $\sqrt{□□□} = □□$	**d)** $\sqrt{1□□□} = □□$
e) $\sqrt{□□} = □□$	**f)** $\sqrt{1□,□□} = □,□$	**g)** $\sqrt{□,□□} = □,□$	**h)** $\sqrt{\frac{1}{□□}} = \text{—}$

i) Finde möglichst viele Lösungen. Wie viele gibt es?

Quelle: Mallas, IQSH

Als Bearbeitungszeit sollte man 20 Minuten einplanen. Die Aufgabe ersetzt eine halbe Lehrbuchseite voller Aufgaben der nachfolgend angedeuteten Art.

1a) $\sqrt{36}$	**b)** $\sqrt{9}$	**c)** $\sqrt{25}$	**d)** $\sqrt{144}$	**e)**	.... **u)**
2a) $\sqrt{900}$	**b)** $\sqrt{3600}$	**c)** $\sqrt{90000}$	**d)** $\sqrt{14400}$	**e)**	.... **q)**
3a) $\sqrt{0{,}04}$	**b)** $\sqrt{0{,}16}$	**c)** $\sqrt{0{,}0009}$	**d)** $\sqrt{0{,}25}$	**e)**	.... **r)**
4a) $\sqrt{\frac{16}{25}}$	**b)** $\sqrt{\frac{625}{900}}$	**c)** $\sqrt{\frac{4}{100}}$	**d)** $\sqrt{\frac{169}{196}}$	**e)**	.... **r)**

Diese geschlossenen einschrittigen Aufgaben stellen bei Nutzung des Taschenrechners kaum noch eine intellektuelle Herausforderung dar. Das führt möglicherweise zu Konflikten, weil die Lehrkraft diese „Aufgabenplantage“ ohne Hilfsmittel bearbeiten lassen möchte. Dagegen wird mit der Aufgabe ‚**passende Ziffern für die Wurzeln**’ durch das Öffnen der Fragestellung eine höhere kognitive Schüleraktivierung erreicht, die auch durch Nutzung des Taschenrechners als Werkzeug zum Experimentieren nicht geschmälert wird. Auf der grundlegenden Anforderungsebene wird der Umgang mit einfachen Quadratwurzeln erlernt. Auf den höheren Anforderungsebenen können zahlreiche Entdeckungen gemacht werden, z.B. Zusammenhänge zwischen der Stellenzahl von Radikand und Wurzel oder Regeln für mögliche Endziffern. Dies ist propädeutisch für die Approximation irrationaler Wurzeln. Die Anzahl der Lösungen durch Überlegungen zu bestimmen ist ein anspruchsvolles Abzählproblem, das alternativ durch systematisches Suchen und Aufschreiben aller Lösungen zu bewältigen ist. Teilaufgabe **e)** verlangt mathematisches Argumentieren. Während die halbe Buchseite voller Wurzeln eintönig nur den Umgang mit der neuen Schreibweise sowie Rechenfertigkeiten trainiert, verlangt und fördert die offene Lernaufgabe mehrere allgemeine mathematische Kompetenzen und bewegt sich in den *Prozesskontexten Erfinden/Entdecken, Prüfen/Beweisen* sowie *Überzeugen/Darstellen*.

Bei der Besprechung der Lösungen stellt die Heterogenität der Lerngruppe kein Problem dar. Vielmehr ist durch die vielfältigen Ergebnisse und Entdeckungen das Anhören und Diskutieren der Schülerbeiträge für alle Lernenden von Interesse.

Auf den folgenden Seiten werden folgende Dokumente im Word-Format für die Verwendung im Unterricht zur Verfügung gestellt:

- die Aufgabenstellung ‚**passende Ziffern für die Wurzeln**' in großer Schrift als OHP-Folie formatiert
- die Aufgabenstellung ‚**rationale Produkte**' **(Leitfaden Seite 47)**
- eine ausgearbeitete Musterlösung zur Aufgabe ‚**passende Ziffern für die Wurzeln**'
- eine ausgearbeitete Musterlösung zur Aufgabe ‚**rationale Produkte**'
- das Aufgabenblatt ‚**kurze und lange Wurzelzeichen**' mit Lösungsblatt
- die Aufgabenstellung ‚**verkleidete Wurzeln**' (**Leitfaden Seite 47**)
- eine ausgearbeitete Musterlösung zur Aufgabe ‚**verkleidete Wurzeln**'

passende Ziffern bei Wurzeln

Das Symbol $\square$ steht für eine beliebige <u>Ziffer</u>. Es können sowohl verschiedene als auch gleiche Ziffern in die Kästchen eingetragen werden. Finde jeweils passende Ziffern.

a) $\sqrt{\square} = \square$ **b)** $\sqrt{\square\square} = \square$ **c)** $\sqrt{\square\square\square} = \square\square$

d) $\sqrt{1\square\square\square} = \square\square$ **e)** $\sqrt{\square\square} = \square\square$ **f)** $\sqrt{1\square,\square\square} = \square,\square$

g) $\sqrt{\square,\square\square} = \square,\square$ **h)** $\sqrt{\dfrac{1}{\square\square}} = \underline{\qquad}$

i) Finde möglichst viele Lösungen. Wie viele sind es?

Merkmale der Aufgabe:

- niedrige Einstiegsschwelle, es genügen Beispiele
- Alle Schüler/innen können sich mit dem Thema beschäftigen und dabei etwas lernen. Niemand wird überfordert, niemand wird gelangweilt.
- Es werden die gleichen Inhalte bearbeitet wie bei der "Plantagenaufgabe" (siehe nächste Seite), aber interessanter verpackt. Es gibt auch keinen Konflikt bei der Benutzung des Taschenrechners, weil auch bei seiner Benutzung niemandem das Denken abgenommen wird.
- Herausforderung zum Entdecken, z.B. durch Probieren die kleinste und die größte Lösung zu finden.
- Die unlösbare Gleichung fordert zum Argumentieren und eventuell zum Beweisen heraus.
- Verschiedene Lösungswege: Die endlich großen Anzahlen wie 21 und 22 lassen sich sowohl durch Aufschreiben aller Lösungen bestimmen als auch durch ein Abzählschema (Vernetzung von Inhalten).

Intelligentes Üben – statt „viel hilft viel” lieber „die intelligente Fragestellung”

statt

1a) $\sqrt{36}$ **b)** $\sqrt{9}$ **c)** $\sqrt{25}$ **d)** $\sqrt{144}$ **e)** .... **u)**

2a) $\sqrt{900}$ **b)** $\sqrt{3600}$ **c)** $\sqrt{90000}$ **d)** $\sqrt{14400}$ **e)** .... **q)**

3a) $\sqrt{0{,}04}$ **b)** $\sqrt{0{,}16}$ **c)** $\sqrt{0{,}0009}$ **d)** $\sqrt{0{,}25}$ **e)** .... **r)**

4a) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ **b)** $\sqrt{\frac{625}{900}}$ **c)** $\sqrt{\frac{4}{100}}$ **d)** $\sqrt{\frac{169}{196}}$ **e)** .... **r)**

lieber:

passende Ziffern bei Wurzeln

Das Symbol □ steht für eine beliebige Ziffer. In die Kästchen können also verschiedene oder auch gleiche Ziffern eingetragen werden. Finde jeweils passende Ziffern.

a) $\sqrt{\square} = \square$ **b)** $\sqrt{\square\square} = \square$ **c)** $\sqrt{\square\square\square} = \square\square$ **d)** $\sqrt{1\square\square\square} = \square\square$

e) $\sqrt{\square\square} = \square\square$ **f)** $\sqrt{1\square{,}\square\square} = \square{,}\square$ **g)** $\sqrt{\square{,}\square\square} = \square{,}\square$ **h)** $\sqrt{\frac{1}{\square\square}} = \frac{}{}$

i) Finde möglichst viele Lösungen. Wie viele sind es?

oder in dieser Variante

2) $\square\square\ldots\square\square$ ist eine ganze Zahl, wobei □ für eine Ziffer steht.

- Gib Beispiele für Zahlen an, bei denen $\sqrt{\square\square\ldots\square\square}$ „aufgeht“.
- Suche gemeinsame Merkmale dieser Zahlen. Formuliere Regeln.

3) $\square\square\ldots{,}\ldots\square\square$ ist ein Dezimalbruch.

- Gib auch hier Beispiele für Dezimalbrüche an, bei denen $\sqrt{\square\square\ldots{,}\ldots\square\square}$ „aufgeht“.
- Suche gemeinsame Merkmale dieser Zahlen. Formuliere Regeln.

nicht nur

1) Ziehe die Wurzel teilweise **a)** $\sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{18}$ **c)** $\sqrt{50}$ **d)** $\sqrt{60}$ **e)** .... **u)**

2) Bringe unter die Wurzel **a)** $3\cdot\sqrt{2}$ **b)** $2\cdot\sqrt{3}$ **c)** $4\cdot\sqrt{5}$ **d)** $3\sqrt{3}$ **e)** .... **q)**

3) Ziehe die Wurzel teilweise **a)** $\sqrt{a^2\cdot b}$ **b)** $\sqrt{a\cdot b^2}$ **c)** $\sqrt{4a}$ **d)** $\sqrt{12b}$ **e)** .... **r)**

4) Bringe unter die Wurzel **a)** $a\cdot\sqrt{2}$ **b)** $2\cdot\sqrt{b}$ **c)** $c^2\cdot\sqrt{5}$ **d)** $d\sqrt{d}$ **e)** .... **w)**

sondern auch solche Aufgaben:

rationale Produkte

1) $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ sollen irrational sein. Finde mindestens vier Beispiele für *a* und *b*, so dass $\sqrt{a\cdot b}$ rational ist.

2) $\left(\sqrt{18}+\sqrt{8}\right)^2$ ist rational : $\left(\sqrt{18}+\sqrt{8}\right)^2 = 18 + 2\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{8} + 8 = 26 + 2\cdot\sqrt{144} = 26 + 24 = 50$.
Finde weitere Beispiele.

passende Ziffern bei Wurzeln – Lösungen

Das Symbol □ steht für eine beliebige <u>Ziffer</u>. In die Kästchen können also verschiedene oder auch gleiche Ziffern eingetragen werden.

Für **a)** bis **d)** und **f)** bis **g)** <u>genügen jeweils Beispiele</u>. In der Musterlösung sind alle Lösungen angegeben bzw. das System wird beschrieben, damit die Schüler/innen sich von der Richtigkeit überzeugen können. Bei **e)** genügt zunächst die Angabe, dass "man" bzw. "ich" keine Lösung gefunden habe. Eine Begründung kann im Gespräch entwickelt werden.

a) $\sqrt{\square} = \square$ hat vier Lösungen $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$.

b) $\sqrt{\square\square} = \square$ hat sechs Lösungen $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{81} = 9$.

c) $\sqrt{\square\square\square} = \square\square$ hat 22 Lösungen $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{121} = 11$, ... , $\sqrt{961} = 31$. Die Anzahl der Lösungen berechnet man mit $31 - 10 + 1 = 22$, weil sowohl die 10 als auch die 31 mitgezählt werden.

d) $\sqrt{1\square\square\square} = \square\square$ hat 13 Lösungen $\sqrt{1024} = 32$, $\sqrt{1089} = 33$, ... , $\sqrt{1936} = 44$. Die Anzahl der Lösungen berechnet man mit $44 - 32 + 1 = 13$, weil sowohl die 32 als auch die 44 mitgezählt werden.

e) $\sqrt{\square\square} = \square\square$ hat keine Lösung. Die kleinste zweistellige Zahl ist 10, und deren Quadrat $10^2 = 100$ ist bereits dreistellig. Es kann also keine natürliche zahl mit diesen Eigenschaften geben.

f) $\sqrt{1\square,\square\square} = \square,\square$ hat 13 Lösungen $\sqrt{10{,}24} = 3{,}2$, $\sqrt{10{,}89} = 3{,}3$, ... , $\sqrt{19{,}36} = 4{,}4$. Die Anzahl der Lösungen entspricht der in **d)**, nur dass hier die Wurzeln von 3,2 bis 4,4 in 0,1 er-Schritten wachsen.

g) $\sqrt{\square,\square\square} = \square,\square$ hat 21 Lösungen $\sqrt{1{,}21} = 1{,}1$, $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$, ... , $\sqrt{9{,}61} = 3{,}1$. Die Anzahl der Lösungen entspricht der in **e)**, nur dass hier die Wurzeln von 1,1 bis 3,1 in 0,1 er-Schritten wachsen und die außerdem die 1,0 nicht mitzählt.

h) $\sqrt{\frac{1}{\square\square}} = \frac{}{}$ hat sechs Lösungen $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$, $\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$, $\sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6}$, $\sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7}$, $\sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}$ sowie $\sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{1}{9}$.

i) Bei Teilaufgabe **e)** gibt es keine Lösung, bei allen anderen Teilaufgaben gibt es endlich viele Lösungen. Als Lösung genügen jeweils Beispiele. In der Musterlösung sind jeweils alle Lösungen sowie deren Anzahl angegeben.

rationale Produkte – Lösungen

1) Beispiele für irrationale Wurzeln $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$, deren Produkt $\sqrt{a \cdot b}$ rational ist:

- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$, $\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 6$, $\sqrt{15} \cdot \sqrt{15} = 15$, ... ; allgemein: $a = b$; $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ führt auf die Definition der Wurzel, das Produkt $a \cdot a = a^2$ im Radikanden ist eine Quadratzahl.

- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2^3} = \sqrt{2^4} = 2^2 = 4$, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3^3} = \sqrt{3^4} = 3^2 = 9$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2^5} = \sqrt{2^6} = 2^3 = 8$, $\sqrt{5} \cdot \sqrt{125} = 25$, $\sqrt{7} \cdot \sqrt{343} = 49$, ... ; allgemein: a und b enthalten jeweils einen Primfaktor in ungerader Potenz (das bedeutet, dass die Hochzahl ungerade ist, d.h. die Anzahl der Primfaktoren in dem Produkt ist ungerade). Das Produkt $a \cdot b$ enthält den Primfaktor bzw. die Primfaktoren dann in gerader Potenz.

- $\sqrt{6} \cdot \sqrt{216} = 36$, $\sqrt{10} \cdot \sqrt{1000} = 100$, $\sqrt{15} \cdot \sqrt{3375} = 225$, $\sqrt{10} \cdot \sqrt{100\,000} = 1000$, ; allgemein: a und b enthalten jeweils die gleichen Primfaktoren in ungerader Potenz. Das Produkt $a \cdot b$ enthält die Primfaktoren dann in gerader Potenz.

- $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3 \cdot 4} = \sqrt{3^2 \cdot 2^2} = 3 \cdot 2 = 6$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = 6$, $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = 10$, $\sqrt{6} \cdot \sqrt{150} = 30$, .. ; allgemein: a und b enthalten jeweils Primfaktoren in ungerader oder gerader Potenz. Das Produkt $a \cdot b$ enthält die Primfaktoren dann in gerader Potenz.

2) alle irrationalen Wurzeln aus **1)** sind als Lösungen geeignet. Zu jedem Spiegelstrich ein Beispiel:

- $\left(\sqrt{6} + \sqrt{6}\right)^2 = 6 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} + 6 = 12 + 2 \cdot \sqrt{36} = 12 + 12 = 24$

- $\left(\sqrt{2} + \sqrt{8}\right)^2 = 2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} + 8 = 10 + 2 \cdot \sqrt{16} = 10 + 8 = 18$

- $\left(\sqrt{10} + \sqrt{1000}\right)^2 = 10 + 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{1000} + 1000 = 1010 + 2 \cdot \sqrt{10\,000} = 1010 + 200 = 1210$

- $\left(\sqrt{3} + \sqrt{12}\right)^2 = 3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} + 12 = 15 + 2 \cdot \sqrt{36} = 15 + 12 = 27$

kurze und lange Wurzelzeichen

Verlängere das Wurzelzeichen oder ergänze weitere Wurzelzeichen, so dass die Gleichung erfüllt ist (so dass die Rechnung stimmt).

Beispiele

Aufgabe	Lösung	Hilfe
$\sqrt{8}+\overline{1}=3$	$\sqrt{8+1}=3$	$\sqrt{8+1}=\sqrt{9}=3$
$\sqrt{9}+\overline{16}=5$	$\sqrt{9+16}=5$	$\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$
$\sqrt{9}+\overline{16}=7$	$\sqrt{9}+\sqrt{16}=7$	$\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$

Aufgaben

1) Verlängere das Wurzelzeichen oder ergänze weitere Wurzelzeichen, so dass die Gleichung erfüllt ist (so dass die Rechnung stimmt).
Überspringe Aufgaben nach Lernfortschritt und gehe zu **2)** oder **3)** über.

a) $\sqrt{4}+\overline{5}=3$

b) $\sqrt{2}+\overline{2}=2$

c) $\sqrt{8}+\overline{8}=4$

d) $\sqrt{4}+\overline{4}+\overline{1}=3$

e) $\sqrt{2^2}+\overline{2^2}+\overline{1^2}=3$

f) $\sqrt{64}+\overline{36}=14$

g) $\sqrt{3^2}+\overline{6^2}+\overline{2^2}=7$

h) $\sqrt{64}+\overline{36}=10$

i) $\sqrt{4^2}+\overline{4^2}+\overline{2^2}=\sqrt{36}$

j) $\sqrt{4}\cdot\overline{9}=6$

k) $\sqrt{16}+\overline{16}+\overline{4}=10$

l) $\sqrt{0{,}25}+\overline{0{,}75}=1$

m) $\sqrt{0{,}25}+\overline{0{,}11}=0{,}6$

n) $\sqrt{0{,}25}+\overline{0{,}25}=1$

o) $\sqrt{12^2}+\overline{5^2}=\sqrt{13^2}$

p) $\sqrt{1{,}44}+\overline{0{,}25}=1{,}7$

q) $\sqrt{1{,}44}+\overline{0{,}25}=1{,}3$

r) $\sqrt{400}+\overline{225}=25$

s) $\sqrt{144}+\overline{81}=15$

t) $\sqrt{0{,}25}\cdot\overline{0{,}25}=0{,}25$

2) Erfinde selbst ähnliche Aufgaben und probiere sie mit deinen Mitschülern aus.

3) Setze passende Zahlen ein.

a) $\sqrt{64+\square^2}=10$

b) $\sqrt{256+\square^2}=20$

c) $\sqrt{\square}+\sqrt{81}=11$

d) $\sqrt{29^2-20^2}=\sqrt{\square^2}=\square$

e) $\sqrt{\square}+\sqrt{\square}=8$

f) $\sqrt{3^2+2\cdot3\cdot4+4^2}=\sqrt{\square^2}=\square$

g) $\sqrt{(2+5)^2}=\sqrt{\square^2}=\square$

h) $\sqrt{5^2-2\cdot5\cdot3+5^2}=\sqrt{\square^2}=\square$

i) $\sqrt{(10-7)^2}=\sqrt{\square^2}=\square$

j) $\sqrt{\square^2+\square^2}=10$

Quelle: Helmut Mallas, IQSH

Lösungen

1) Verlängere das Wurzelzeichen oder ergänze weitere Wurzelzeichen, so dass die Gleichung erfüllt ist (so dass die Rechnung stimmt).

a) $\sqrt{4+5}=\sqrt{9}=3$

b) $\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$

c) $\sqrt{8+8}=\sqrt{16}=4$

d) $\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$

e) $\sqrt{2^2+2^2+1^2}=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$

f) $\sqrt{64}+\sqrt{36}=8+6=14$

g) $\sqrt{3^2+6^2+2^2}=\sqrt{9+36+4}=\sqrt{49}=7$

h) $\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$

i) $\sqrt{4^2+4^2+2^2}=\sqrt{16+16+4}=\sqrt{36}=6$

j) $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=2\cdot 3=6$ und
zugleich $\sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{36}=6$

k) $\sqrt{16}+\sqrt{16}+\sqrt{4}=4+4+2=10$

l) $\sqrt{0{,}25+0{,}75}=\sqrt{1}=1$

m) $\sqrt{0{,}25+0{,}11}=\sqrt{0{,}36}=0{,}6$

n) $\sqrt{0{,}25}+\sqrt{0{,}25}=0{,}5+0{,}5=1$

o) $\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=\sqrt{13^2}=13$

p) $\sqrt{1{,}44}+\sqrt{0{,}25}=1{,}2+0{,}5=1{,}7$

q) $\sqrt{1{,}44+0{,}25}=\sqrt{1{,}69}=1{,}3$

r) $\sqrt{400+225}=\sqrt{625}=25$

s) $\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=15$

t) $\sqrt{0{,}25}\cdot\sqrt{0{,}25}=0{,}5\cdot 0{,}5=0{,}25$ und
zugleich $\sqrt{0{,}25\cdot 0{,}25}=\sqrt{0{,}25^2}=0{,}25$

2) Kontrolliere die Lösungen deiner selbst erstellten Aufgaben mit Hilfe deiner Mitschülern und auch mit Hilfe des Taschenrechners.

3) Setze passende Zahlen ein.

a) $\sqrt{64+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$

b) $\sqrt{256+12^2}=\sqrt{256+144}=\sqrt{400}=20$

c) $\sqrt{4}+\sqrt{81}=2+9=11$

d) $\sqrt{29^2-20^2}=\sqrt{841-400}=\sqrt{441}=\sqrt{21^2}=21$

e) z.B. $\sqrt{16}+\sqrt{16}=4+4=8$ oder
$\sqrt{25}+\sqrt{9}=5+3=8$ oder
$\sqrt{36}+\sqrt{4}=6+2=8$ oder
$\sqrt{49}+\sqrt{1}=7+1=8$

f) $\sqrt{3^2+2\cdot 3\cdot 4+4^2}=\sqrt{9+24+16}=$
$\sqrt{49}=\sqrt{7^2}=7$

g) $\sqrt{(2+5)^2}=\sqrt{7^2}=7$

h) $\sqrt{5^2-2\cdot 5\cdot 3+3^2}=\sqrt{25-30+9}=$
$\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$

i) $\sqrt{(10-7)^2}=\sqrt{3^2}=3$

j) z.B. $\sqrt{2^2\cdot 5^2}=\sqrt{4\cdot 25}=\sqrt{100}=10$
oder
$\sqrt{1^2\cdot 10^2}=\sqrt{1\cdot 100}=\sqrt{100}=10$

Quelle: Helmut Mallas, IQSH

3) verkleidete Wurzeln

verkleidete Wurzeln

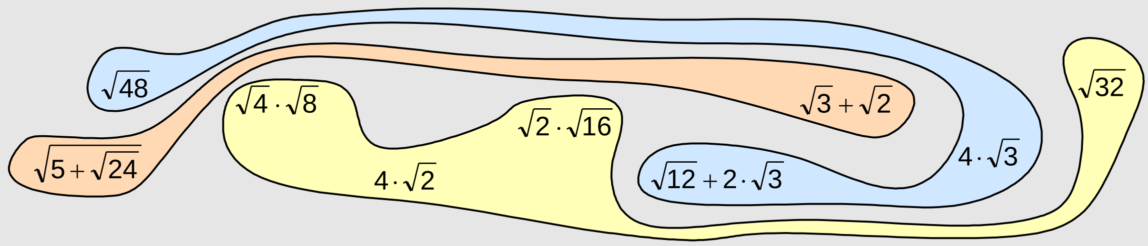
Suche ohne Taschenrechner möglichst viele Terme mit dem gleichen Wert.

$\sqrt{48}$ $\sqrt{4}\cdot\sqrt{8}$ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{16}$ $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ $\sqrt{32}$ $\sqrt{12}+2\cdot\sqrt{3}$ $\sqrt{5+\sqrt{24}}$ $4\cdot\sqrt{2}$ $4\cdot\sqrt{3}$

nach Leuders, mathemagische Momente, Seite 140

verkleidete Wurzeln – Lösungen

Terme mit dem gleichen Wert sind jeweils verbunden.



Diese Terme haben jeweils den gleichen Wert:

$\sqrt{12}+2\cdot\sqrt{3}=$ $\sqrt{4\cdot 3}+2\cdot\sqrt{3}=$ $2\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{3}=4\cdot\sqrt{3}$	$\sqrt{48}=$ $\sqrt{16\cdot 3}=4\cdot\sqrt{3}$	$4\cdot\sqrt{3}$

und

$\sqrt{32}=$ $\sqrt{16\cdot 2}=4\cdot\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{16}=$ $\sqrt{2}\cdot 4 \quad =4\cdot\sqrt{2}$	$\sqrt{4}\cdot\sqrt{8}=$ $2\cdot\sqrt{4\cdot 2}=$ $2\cdot 2\cdot\sqrt{2}=4\cdot\sqrt{2}$	$4\cdot\sqrt{2}$

sowie

$\sqrt{5+\sqrt{24}}$	$\sqrt{3}+\sqrt{2} =$ $\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2} =$ $\sqrt{3+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+2} =$ $\sqrt{5+\sqrt{4\cdot 3\cdot 2}} = \sqrt{5+\sqrt{24}}$

didaktischer Kommentar

Ist diese Aufgabe heute noch zeitgemäß? Lässt sich überzeugend begründen, den Einsatz des Taschenrechners zu unterbinden? Schließlich könnte man mit dem Taschenrechners sehr schnell feststellen, welche Terme den gleichen Wert haben. Ja, das stimmt. Aber der Taschenrechner erklärt nicht, *warum* bestimmte Terme den gleichen Wert haben. Das von Timo Leuders genial gewählte Beispiel $\sqrt{5+\sqrt{24}}$ entzieht sich dem schematischen Rechnen und lässt sich nur ergründen, wenn man Mathematik betreibt. Durch den Arbeitsauftrag „Konstruiere zu jedem der Werte einen weiteren Term mit diesen Wert.“ ist es beinahe gleichgültig, ob man den Taschenrechner hinzuzieht.