1)	Berechnen Sie alle fehlenden Winkel sowie den Flächeninhalt: a = 60 mm, b = 70 mm, c = 80 mm
2)	Be…
5)	…inhalt: c = 80 mm, α = 35°, β = 55°
6)	Berechnen Sie alle fehlenden Seitenlängen und Winkel sowie den Flächeninhalt: c = 80…
7)	Berec… a = 40…
8)	Berec… a = 70…
9)	Berec… c = 50 mm, α = 43°, γ = 37°
10)	Berechnen Sie alle fehlenden Seitenlängen und Winkel sowie den Flächeninhalt: a = 30 mm, c = 70 mm, α = 15°
11)	Berechnen Sie alle fehlenden Seitenlängen und Winkel sowie den Flächeninhalt: a = 70 mm, c = 30 mm, α = 15°
12)	Berechnen Sie alle fehlenden Winkel sowie den Flächeninhalt:
20)	b = 40 mm, c = 60 mm, α = 40°
21)	Berechnen Sie alle fehlenden Seitenlängen und Winkel sowie den Flächeninhalt: a = 60 mm, b = 70 mm, β = 15°

Das sieht auf den ersten Blick nach einer Aufgabenplantage aus!

Ungünstig: Im Prinzip sind es lauter gleichförmige Aufgaben, die nur eine Tätigkeit üben - ausschließlich trigonometrische Berechnungen.

Ob das gut oder schlecht ist, steht nicht fest. Es kommt vielmehr darauf an, was man daraus macht!

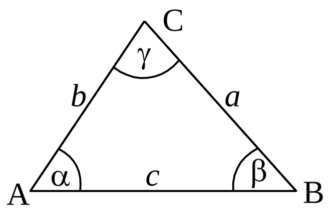
Gut: Die Aufgaben sind gemischt. Es ist jeweils zu entscheiden, welche Vorgehensweise erforderlich bzw. sinnvoll ist.

Hinweis: In der Word-Version dieses Arbeitsblattes lassen sich die Sprechblasen sowie dieses Textfeld entfernen. Dann kann das Arbeitsblatt für den Unterricht genutzt werden – am besten mit den zugehörigen reflexionsanregenden Fragen. Es genügt, die letzten Seiten zum Kontrollieren der Lösungen ein- oder zweimal auszudrucken – aber bitte nicht doppelseitig.

Reflexionsanregende Fragen und übergeordnete Arbeitsaufträge:

- Notiere die Kongruenzsätze, die du kennst. Nutze dafür Abkürzungen wie SSS.
- Fertige eine Planfigur an.
- Jede Aufgabe gibt drei Bestimmungsstücke vor.
  Suche zu jedem Kongruenzsatz eine Aufgabe heraus, deren Bestimmungsstücke dazu passen.
- Suche eine Aufgabe heraus, bei der du mit dem Kosinussatz anfangen musst.
- Suche eine Aufgabe heraus, bei der du mit dem Sinussatz anfangen musst.
- Suche eine Aufgabe heraus, bei der es zwei Lösungen gibt.
- Suche zu einer Aufgabe, die du bereits bearbeitet hast, eine passende zweite Aufgabe, die man mit genau der gleichen Vorgehensweise lösen kann.
- Ordne die Aufgaben: Welche Aufgaben findest du besonders schwierig, welche fallen dir nicht so schwer?

Kurzübersicht Lösungsweg



Es muss zunächst (am besten an einer Planfigur) festgestellt werden, welcher Ansatz in Frage kommt. Im Fall SSW muss man prüfen, ob es nur eine Lösung (SsW) oder zwei Lösungen (sSW) gibt. Nach der ersten Berechnung sind vier Bestimmungsstücke verfügbar; man hat die Wahl zwischen verschiedenen Vorgehensweisen. Am sichersten ist stets der Kosinussatz, aber der Term bedeutet auch den größten Aufwand. Der Sinussatz liefert bei der Bestimmung von Winkeln kein eindeutiges Ergebnis. Der Taschenrechner zeigt nur den spitzwinkligen Fall an, ein solches Ergebnis wäre bei einem stumpfwinkligen Dreieck falsch. Man sollte in derartigen Fällen immer zweimal den Sinussatz anwenden und das Ergebnis über die Winkelsumme kontrollieren. Die Winkelsumme liefert nur im Fall WSW ein sicheres Ergebnis. Bei rechtwinkligen Dreiecken nicht mit dem Sinussatz, sondern mit dem „normalen Sinus“ bzw. dem „normalen Kosinus“ arbeiten!

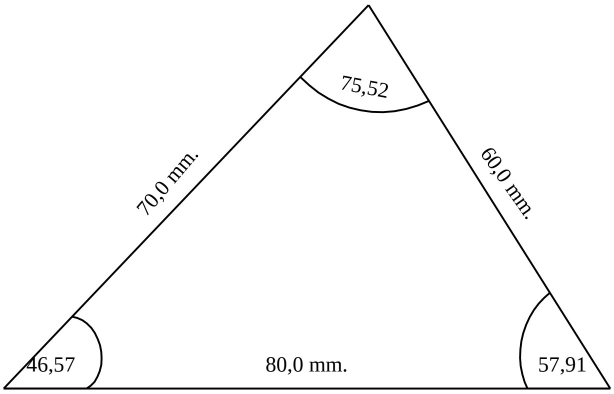
Bestimmungsstücke	Kongruenzsatz, Ansatz	Besonderheit
1) $a = 60$ mm, $b = 70$ mm, $c = 80$ mm	SSS, Kosinussatz	——
2) $a = 60$ mm, $b = 50$ mm, $\gamma = 65°$	SWS, Kosinussatz	——
3) $a = 35$ mm, $c = 55$ mm, $\beta = 35°$	SWS, Kosinussatz	stumpfwinkliges Dreieck; ohne Kontrolle liefert der Sinussatz ein falsches Ergebnis!
4) $b = 65$ mm, $c = 70$ mm, $\alpha = 40°$	SWS, Kosinussatz	——
5) $c = 80$ mm, $\alpha = 35°$, $\beta = 55°$	WSW, Winkelsumme, Sinus oder Kosinus (nicht: Sinussatz)	rechtwinkliges Dreieck
6) $c = 80$ mm, $\alpha = 25°$, $\beta = 55°$	WSW, Winkelsumme und Sinussatz	——
7) $a = 40$ mm, $b = 70$ mm, $\alpha = 25°$	sSW, Sinussatz	zwei Lösungen
8) $a = 70$ mm, $b = 40$ mm, $\alpha = 25°$	SsW, Sinussatz	——
9) $c = 50$ mm, $\alpha = 43°$, $\gamma = 37°$	WSW, Winkelsumme und Sinussatz	——
10) $a = 30$ mm, $c = 70$ mm, $\alpha = 15°$	sSW, Sinussatz	zwei Lösungen
11) $a = 70$ mm, $c = 30$ mm, $\alpha = 15°$	SsW, Sinussatz	——
12) $a = 35$ mm, $b = 35$ mm, $c = 60$ mm	SSS, Kosinussatz	gleichschenkliges Dreieck
13) $a = 43$ mm, $b = 44$ mm, $c = 45$ mm	SSS, Kosinussatz	——
14) $a = 60$ mm, $c = 50$ mm, $\beta = 35°$	SWS, Kosinussatz	——
15) $b = 33$ mm, $c = 70$ mm, $\gamma = 23°$	SsW, Sinussatz	——
16) $b = 70$ mm, $c = 33$ mm, $\gamma = 23°$	sSW, Sinussatz	zwei Lösungen
17) $b = 80$ mm, $\alpha = 30°$ $\gamma = 33°$	WSW, Winkelsumme und Sinussatz	——
18) $b = 39$ mm, $c = 49$ mm, $\beta = 45°$	sSW, Sinussatz	zwei Lösungen
19) $b = 60$ mm, $\alpha = 30°$, $\gamma = 100°$	WSW, Winkelsumme und Sinussatz	——
20) $b = 40$ mm, $c = 60$ mm, $\alpha = 40°$	SWS, Kosinussatz	stumpfwinkliges Dreieck; ohne Kontrolle liefert der Sinussatz ein falsches Ergebnis!
21) $a = 60$ mm, $b = 70$ mm, $\beta = 15°$	sSW, Sinussatz	——

1) a = 60 mm, b = 70 mm, c = 80 mm

Kongruenzsatz SSS. Es muss der Kosinussatz angewendet werden. Beliebig ist nur, mit welchem Winkel man beginnt. Ansatz z.B.

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0{,}6875 \Rightarrow \alpha = 46{,}56...^\circ$$

Den Winkel speichern! Noch einmal Kosinussatz? Einfacher geht es mit dem Sinussatz weiter, z.B. $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha = 0{,}8472... \Rightarrow$



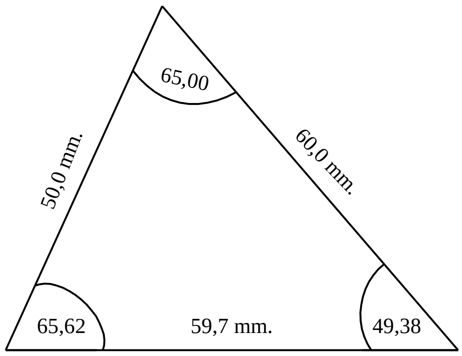
$\beta = 57{,}91..^\circ$. Ergebnis speichern! γ ließe sich aus der Winkelsumme berechnen. Besser ist es, γ über den Sinussatz zu berechnen, denn dies ergibt eine Kontrollmöglichkeit.

Fläche: z.B. $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b\cdot\sin\alpha.$ $\quad A = \frac{1}{2}c\cdot h_c = \frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
6	7	8	46,56746°	57,91005°	75,52249°	6,778	5,809	5,083	20,33

2) a = 60 mm, b = 50 mm, γ = 65°

Kongruenzsatz SWS. Es muss der Kosinussatz angewendet werden. $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = 5{,}97...\,\text{cm}$. Das Ergebnis speichern! Einfacher geht es mit dem Sinussatz weiter, z.B. $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{c}\cdot\sin\gamma = 0{,}7590... \Rightarrow \beta = 49{,}37...^\circ$. Ergebnis speichern! α□ ließe sich aus der Winkelsumme berechnen. Besser ist es, α über den Sinussatz zu berechnen, denn dies ergibt eine Kontrollmöglichkeit (siehe z.B. Aufgabe 3) und 20) !).

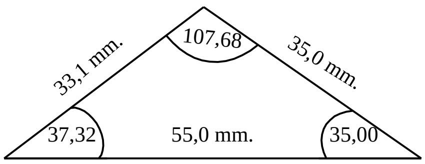


Fläche: z.B. $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b\cdot\sin\alpha.$ $\quad A = \frac{1}{2}c\cdot h_c = \frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
6	5	5,97	65,6212°	49,3788°	65°	4,532	5,438	4,554	13,59

3) a = 35 mm, c = 55 mm, β = 35°

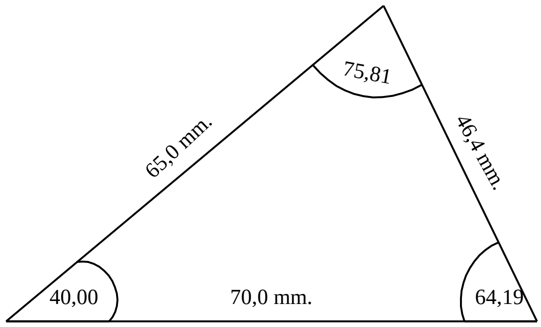
Kongruenzsatz SWS. Es muss der Kosinussatz angewendet werden. $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta} = 3{,}31...\,\text{cm}$. Das Ergebnis unbe-



dingt speichern! Einfacher geht es mit dem Sinussatz weiter. Bei $\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c}{b}\cdot\sin\beta$ weist das falsche Ergebnis $\sin\gamma = 0{,}9527... \Rightarrow \gamma = 72{,}32...^\circ$ uns auf ein Problem hin! Berechnen wir α nicht über die Winkelsumme, sondern aus $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{b}\cdot\sin\beta = 0{,}6063... \Rightarrow \alpha = 37{,}32...^\circ$, dann ergibt die Winkelsumme $144{,}64...^\circ$. Das Ergebnis für α speichern! α muss richtig sein, denn a ist die kürzere Seite. c ist die längste Seite, deshalb muss der Winkel γ in diesem Fall größer als 90° sein. $\sin 180^\circ - \gamma = 0{,}9527... \Rightarrow \gamma = 180^\circ - 72{,}32...^\circ \Rightarrow \gamma = 107{,}67...^\circ$. Ohne diese Kontrolle wäre der Winkel γ falsch berechnet worden! Fläche: z.B. $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b\cdot\sin\alpha.$ $\quad A = \frac{1}{2}c\cdot h_c = \frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
3,5	3,311	5,5	37,32386°	35°	107,6761°	3,155	3,335	2,008	5,521

4) b = 65 mm, c = 70 mm, α = 40°

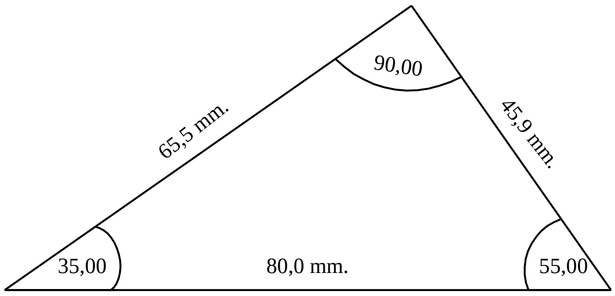


Kongruenzsatz SWS. Es muss der Kosinussatz angewendet werden. $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}=4{,}64\ldots\text{cm}$. Das Ergebnis speichern! Einfacher geht es mit dem Sinussatz weiter, z.B. $\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\alpha}{a}\Rightarrow\sin\beta=\frac{b}{a}\cdot\sin\alpha=0{,}9002..$ $\Rightarrow\beta=64{,}18\ldots°$. Das Ergebnis speichern. γ ließe sich aus der Winkelsumme berechnen. Besser ist es, γ über den Sinussatz zu berechnen, denn dies ergibt eine Kontrollmöglichkeit (siehe z.B. Aufgabe 3) !).

Fläche: z.B. $\sin\alpha=\frac{h_c}{b}\Rightarrow h_c=b\cdot\sin\alpha$. $A=\frac{1}{2}c\cdot h_c=\frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
4,641	6,5	7	40°	64,18967°	75,81033°	6,302	4,5	4,178	14,62

5) c = 80 mm, α = 35°, β = 55°



Kongruenzsatz WSW. Zunächst muss über die Winkelsumme γ berechnet werden.

Das Dreieck ist rechtwinklig!

Lösungsweg 1: Wer bemerkt, dass das Dreieck rechtwinklig ist, berechnet die fehlenden Seiten a und b über die Definition von Sinus oder Kosinus im rechtwinkligen Dreieck, also z.B. $\sin\alpha=\frac{a}{c}\Rightarrow$

$a=c\cdot\sin\alpha=4{,}58\ldots\text{cm}$ und $\cos\alpha=\frac{b}{c}\Rightarrow b=c\cdot\cos\alpha=6{,}55..\text{cm}$.

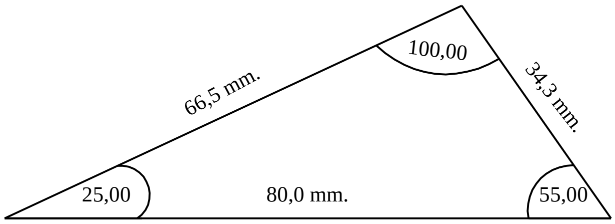
Fläche: Da das Dreieck rechtwinklig ist, nimmt man den Inhalt eines halben Rechtecks, $A=\frac{1}{2}a\cdot b$.

Lösungsweg 2: Wer nicht bemerkt, dass das Dreieck rechtwinklig ist, wendet nun den Sinussatz an, z.B. $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}\;\Rightarrow\; b=c\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=6{,}55\ldots\text{ cm}$. Dieses Ergebnis speichern. Man wendet erneut den Sinussatz an, also $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}\;\Rightarrow a=c\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=4{,}58\ldots\text{ cm}$.

Fläche: z.B. $\sin\alpha=\frac{h_c}{b}\Rightarrow h_c=b\cdot\sin\alpha$. $A=\frac{1}{2}c\cdot h_c=\frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
4,589	6,553	8	35°	55°	90°	6,553	4,589	3,759	15,04

6) c = 80 mm, α = 25°, β = 55°



Kongruenzsatz WSW. Zunächst muss über die Winkelsumme γ berechnet werden. Dann muss der Sinussatz angewendet werden. z.B. $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow$

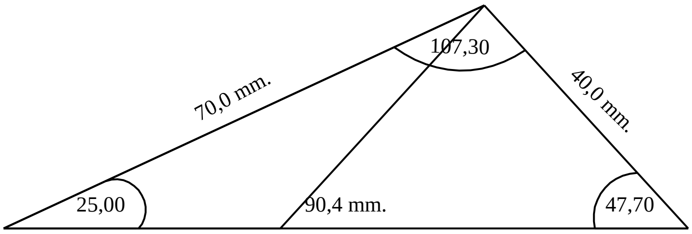
$b = c \cdot \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 6{,}65...\ \text{cm}$. Dieses Ergebnis speichern. Man wendet erneut den Sinussatz an, also

$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow a = c \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 3{,}43...\ \text{cm}$.

Fläche: z.B. $\sin\alpha = \dfrac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \cdot \sin\alpha. \quad A = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
3,433	6,654	8	25°	55°	100°	6,553	3,381	2,812	11,25

7) a = 40 mm, b = 70 mm, α = 25°



Kongruenzsatz sSW. Da der Winkel der kürzeren Seite gegenüberliegt, gibt es zwei Lösungen. Es muss der Sinussatz angewendet werden. $\dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{a} \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{b}{a} \cdot \sin\alpha$.

In Aufgabe 3) und 20) tritt der Fall auf, dass man entscheiden muss, ob der Sinuswert zu einem Winkel über oder unter 90° gehört. Hier sind beide Winkel relevant.

1. Lösung

Aus $\sin\beta = 0{,}7395...$ folgt $\beta = 47{,}69...°$. Diesen Wert speichern! Über die Winkelsumme γ berechnen. Diesen Wert speichern!

Man wendet erneut den Sinussatz an, also $\dfrac{c}{\sin\gamma} = \dfrac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow c = a \cdot \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = 9{,}03...\ \text{cm}$.

Fläche: z.B. $\sin\alpha = \dfrac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \cdot \sin\alpha. \quad A = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin\alpha$.

2. Lösung

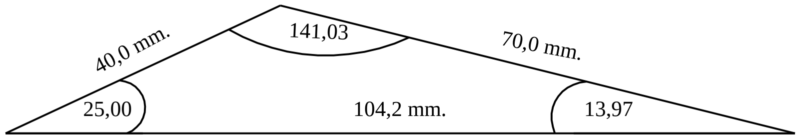
Aus $\sin\beta' = \sin 180° - \beta = 0{,}7395...$ folgt $\beta' = 180° - \beta = 132{,}30..°$. Diesen Wert speichern! Über die Winkelsumme γ' berechnen. Diesen Wert speichern!

Man wendet erneut den Sinussatz an, also $\dfrac{c}{\sin\gamma'} = \dfrac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow c = a \cdot \dfrac{\sin\gamma'}{\sin\alpha} = 3{,}65...\ \text{cm}$.

Fläche: z.B. $\sin\alpha = \dfrac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \cdot \sin\alpha. \quad A = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
4	7	9,04	25°	47,69582°	107,3042°	6,683	3,819	2,958	13,37
$= a$	$= b$	3,65	$= \alpha$	132,3042°	22,7°	2,7	$= h_b$	$= h_c$	5,402

8) $a = 70$ mm, $b = 40$ mm, $\alpha = 25°$



Kongruenzsatz SsW. Da der Winkel der längeren Seite gegenüberliegt, gibt es nur eine Lösung. Es muss der Sinussatz angewendet werden. $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha = 0{,}2414\ldots \Rightarrow \beta = 13{,}97\ldots°$. Diesen Wert speichern! Über die Winkelsumme γ berechnen. Diesen Wert speichern!

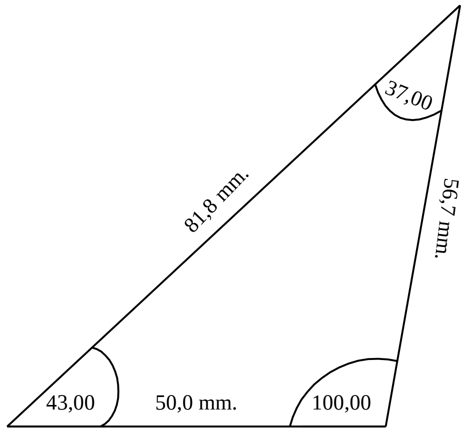
Man wendet erneut den Sinussatz an, also $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow c = a\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = 10{,}4\ldots\,\text{cm}$.

Fläche: z.B. $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b\cdot\sin\alpha.\quad A = \frac{1}{2}c\cdot h_c = \frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
7	4	10,4	25°	13,97486°	141,0251°	2,516	4,403	1,69	8,806

9) $c = 50$ mm, $\alpha = 43°$, $\gamma = 37°$

Kongruenzsatz WSW. Der Winkel β lässt sich über die Winkelsumme bestimmen. Dann muss der Sinussatz angewendet werden. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow a = c\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 5{,}66\ldots\,\text{cm}$.
Diesen Wert speichern!



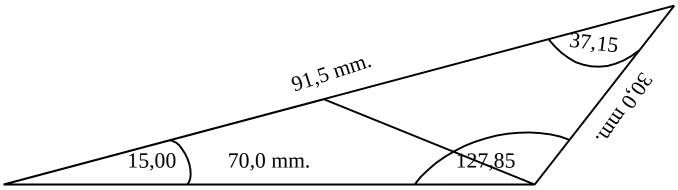
Man wendet erneut den Sinussatz an. $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow$

$b = c\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 8{,}18\ldots\,\text{cm}$. Diesen Wert speichern!

Fläche: z.B. $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b\cdot\sin\alpha.\quad A = \frac{1}{2}c\cdot h_c = \frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
5,666	8,182	5	43°	100°	37°	4,924	3,41	5,58	13,95

10) a = 30 mm, c = 70 mm, α = 15°



Kongruenzsatz sSW. Da der Winkel der kürzeren Seite gegenüberliegt, gibt es zwei Lösungen. Es muss der Sinussatz angewendet werden. $\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c}{a}\cdot\sin\alpha$

In Aufgabe 3) und 20) tritt der Fall auf, dass man entscheiden muss, ob der Sinuswert zu einem Winkel über oder unter 90° gehört. Hier sind beide Winkel relevant.

1. Lösung

Aus $\sin\gamma = 0{,}6039...$ folgt $\gamma = 37{,}15...°$ Diesen Wert speichern! Über die Winkelsumme β berechnen. Diesen Wert speichern!

Man wendet erneut den Sinussatz an, also $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow b = a\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 4{,}37...$ cm.

Fläche: z.B. $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b\cdot\sin\alpha.\quad A = \frac{1}{2}c\cdot h_c = \frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha$.

2. Lösung

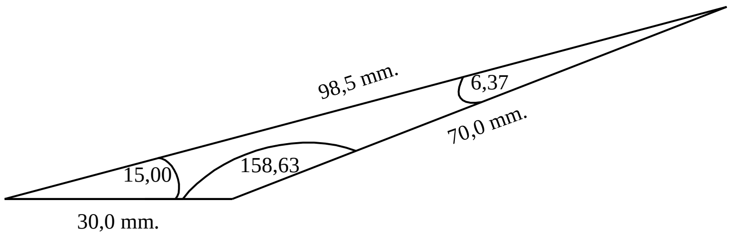
Aus $\sin\gamma' = \sin 180° - \gamma = 0{,}6039...$ folgt $\gamma' = 180° - \gamma = 142{,}849..°$. Diesen Wert speichern! Über die Winkelsumme β' berechnen. Diesen Wert speichern!

Man wendet erneut den Sinussatz an, also $\frac{b}{\sin\beta'} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow b = a\cdot\frac{\sin\beta'}{\sin\alpha} = 9{,}15...$ cm.

Fläche: z.B. $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b\cdot\sin\alpha.\quad A = \frac{1}{2}c\cdot h_c = \frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
3	9,153	7	15°	127,8495°	37,15053°	5,527	1,812	2,369	8,291
= a	4,3703	= c	= α	22,2°	142,85°	2,64	= h_b	= h_c	3,959

11) a = 70 mm, c = 30 mm, α = 15°



Kongruenzsatz SsW. Da der Winkel der längeren Seite gegenüberliegt, gibt es nur eine Lösung. Es muss der Sinussatz angewendet werden. $\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\alpha}{a} \Rightarrow$

$\sin\gamma = \frac{c}{a}\cdot\sin\alpha\quad 0{,}1109... \Rightarrow \gamma = 6{,}36...°$. Diesen Wert speichern! Über die Winkelsumme β berechnen. Diesen Wert speichern!

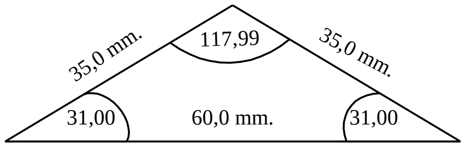
Man wendet erneut den Sinussatz an, also $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow b = a\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 9{,}85...\text{cm}$.

Fläche: z.B. $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b\cdot\sin\alpha.\quad A = \frac{1}{2}c\cdot h_c = \frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
7	9,855	3	15°	158,6315°	6,368493°	1,093	0,776	2,551	3,826

12) a = 35 mm, b = 35 mm, c = 60 mm

Kongruenzsatz SSS. Es muss der Kosinussatz angewendet werden. Beliebig ist nur, mit welchem Winkel man beginnt.



Ansatz z.B. $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = 0{,}8571\ldots \Rightarrow \alpha = 31{,}002\ldots°$. Den Winkel speichern!

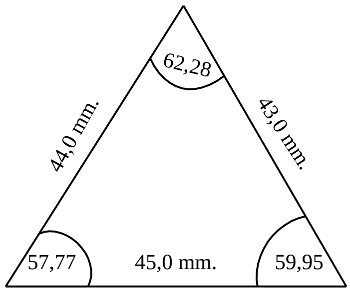
Noch einmal Kosinussatz? Da Dreieck ist gleichschenklig. Nach dem Basiswinkelsatz sind α und β gleich groß. Über die Winkelsumme erhält man den Winkel γ.

Fläche: z.B. $\sin\alpha = \dfrac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b\cdot\sin\alpha$. $A = \frac{1}{2}c\cdot h_c = \frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
3,5	3,5	6	31,00272°	31,00272°	117,9946°	3,09	3,09	1,803	5,408

13) a = 43 mm, b = 44 mm, c = 45 mm

Kongruenzsatz SSS. Es muss der Kosinussatz angewendet werden. Beliebig ist nur, mit welchem Winkel man beginnt.



Ansatz z.B. $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = 0{,}5333\ldots \Rightarrow \alpha = 57{,}769\ldots°$. Diesen Winkel speichern!

Noch einmal Kosinussatz? Einfacher geht es mit dem Sinussatz weiter, z.B. $\dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{a} \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{b}{a}\cdot\sin\alpha = 0{,}8655\ldots \Rightarrow \beta = 59{,}948\ldots°$.

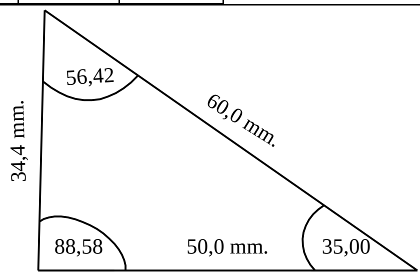
Über die Winkelsumme erhält man den Winkel γ.

Fläche: z.B. $\sin\alpha = \dfrac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b\cdot\sin\alpha$. $A = \frac{1}{2}c\cdot h_c = \frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
4,3	4,4	4,5	57,76905°	59,9487°	62,28225°	3,895	3,807	3,722	8,374

14) a = 60 mm, c = 50 mm, β = 35°

Kongruenzsatz SWS. Es muss der Kosinussatz angewendet werden. $b = \sqrt{a^2+c^2-2ac\cos\beta} = 3{,}44\ldots\text{cm}$. Das Ergebnis speichern!



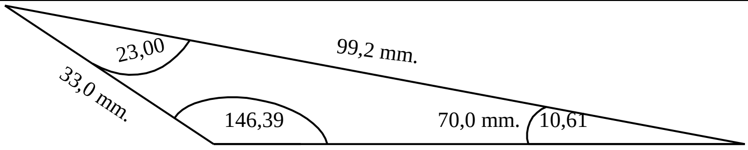
Einfacher geht es mit dem Sinussatz weiter, z.B. $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{a}{b}\cdot\sin\beta = 0{,}9996\ldots \Rightarrow \alpha = 88{,}58\ldots°$ .Ergebnis speichern! γ ließe sich aus der Winkelsumme berechnen. Besser ist es, γ über den Sinussatz zu berechnen, denn dies ergibt eine Kontrollmöglichkeit (siehe z.B. Aufgabe 3) und 20) !).

Fläche: z.B. $\sin\alpha = \dfrac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b\cdot\sin\alpha$. $A = \frac{1}{2}c\cdot h_c = \frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
6	3,443	5	88,58369°	35°	56,41631°	2,868	4,998	3,441	8,604

15) $b = 33$ mm, $c = 70$ mm, $\gamma = 23°$

Kongruenzsatz SsW. Da der Winkel der längeren Seite gegenüberliegt, gibt es nur eine Lösung. Es muss der Sinussatz angewendet werden. $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{c}\cdot\sin\gamma = 0{,}1842\ldots \Rightarrow \beta = 10{,}6146\ldots°$. Diesen Wert speichern!



Über die Winkelsumme α berechnen. Diesen Wert speichern!

Man wendet erneut den Sinussatz an, also $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow c = a\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = 9{,}91\ldots\text{cm}$.

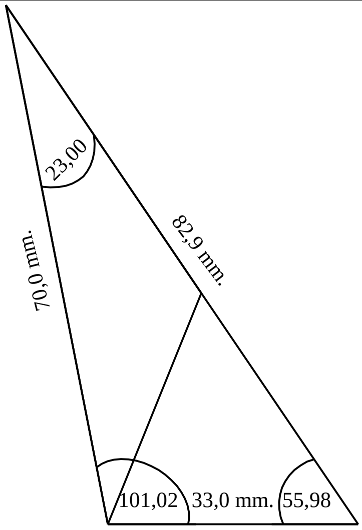
Fläche: z.B. $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b\cdot\sin\alpha.\quad A = \frac{1}{2}c\cdot h_c = \frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
9,918	3,3	7	146,3854°	10,6146°	23°	1,289	3,875	1,827	6,394

16) $b = 70$ mm, $c = 33$ mm, $\gamma = 23°$

Kongruenzsatz sSW. Da der Winkel der kürzeren Seite gegenüberliegt, gibt es zwei Lösungen. Es muss der Sinussatz angewendet werden. $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{c}\cdot\sin\gamma$.

In Aufgabe 3) und 20) tritt der Fall auf, dass man entscheiden muss, ob der Sinuswert zu einem Winkel über oder unter 90° gehört. Hier sind beide Winkel relevant.



1. Lösung

Aus $\sin\beta = 0{,}6288\ldots$ folgt $\beta = 55{,}978\ldots°$. Diesen Wert speichern! Über die Winkelsumme α berechnen. Diesen Wert speichern!

Man wendet erneut den Sinussatz an, also

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow a = c\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = 8{,}2899\ldots\ \text{cm}.$$

Fläche: z.B. $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b\cdot\sin\alpha.\quad A = \frac{1}{2}c\cdot h_c = \frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha$.

2. Lösung

Aus $\sin\beta' = \sin 180° - \beta = 0{,}6288\ldots$ folgt $\beta' = 180° - \beta = 124{,}02..°$. Diesen Wert speichern! Über die Winkelsumme γ' berechnen. Diesen Wert speichern!

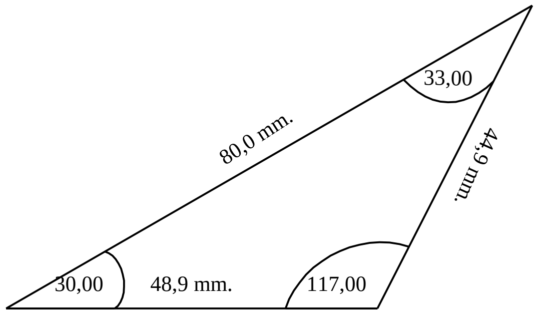
Man wendet erneut den Sinussatz an, also $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma'} \Rightarrow a = c\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma'} = 4{,}597\ldots\ \text{cm}$.

Fläche: z.B. $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b\cdot\sin\alpha.\quad A = \frac{1}{2}c\cdot h_c = \frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
8,29	7	3,3	101,0219°	55,97808°	23°	2,735	3,239	6,871	11,34
4,597	$= b$	$= c$	32,9781°	124°	$= \gamma$	$= h_a$	$= h_b$	3,810	6,287

17) b = 80 mm, α = 30° γ = 33°

Kongruenzsatz WSW. Zunächst muss über die Winkelsumme β berechnet werden. Dann muss der Sinussatz angewendet werden, z.B. $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow c = b \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} =$ $c = 4{,}89...\ \text{cm}$. Dieses Ergebnis speichern. Man wendet erneut den Sinussatz an, also $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow a = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ $a = 4{,}489...\ \text{cm}$.



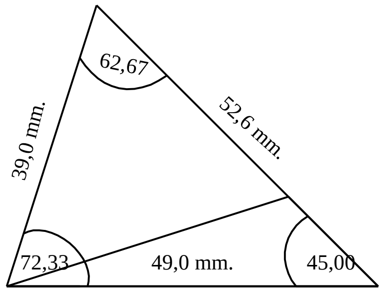
Fläche: z.B. $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \cdot \sin\alpha.\quad A = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
4,489	8	4,89	30°	117°	33°	4,357	2,445	4	9,78

18) b = 39 mm, c = 49 mm, β = 45°

Kongruenzsatz sSW. Da der Winkel der kürzeren Seite gegenüberliegt, gibt es zwei Lösungen. Es muss der Sinussatz angewendet werden. $\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c}{b} \cdot \sin\beta$

In Aufgabe 3) und 20) tritt der Fall auf, dass man entscheiden muss, ob der Sinuswert zu einem Winkel über oder unter 90° gehört. Hier sind beide Winkel relevant.



1. Lösung

Aus $\sin\gamma = 0{,}8884...$ folgt $\gamma = 62{,}67...°$. Diesen Wert speichern! Über die Winkelsumme α berechnen. Diesen Wert speichern!

Man wendet erneut den Sinussatz an, also $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow a = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 5{,}255...\text{cm}$.

Fläche: z.B. $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \cdot \sin\alpha.\quad A = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin\alpha$.

2. Lösung

Aus $\sin\gamma' = \sin 180° - \gamma = 0{,}8884...$ folgt $\gamma' = 180° - \gamma = 117{,}32..°$. Diesen Wert speichern! Über die Winkelsumme α' berechnen. Diesen Wert speichern!

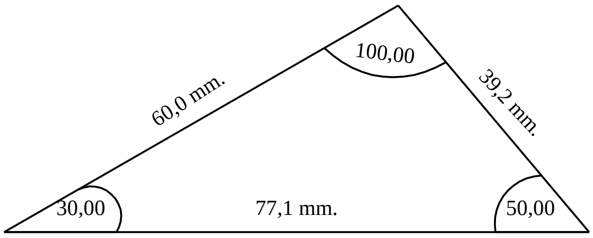
Man wendet erneut den Sinussatz an, also $\frac{a}{\sin\alpha'} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow a = c \cdot \frac{\sin\alpha'}{\sin\gamma} = 1{,}675...\ \text{cm}$.

Fläche: z.B. $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \cdot \sin\alpha.\quad A = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
5,255	3,9	4,9	72,3251	45	62,6749	3,465	4,669	3,716	9,104
1,675	$= b$	$= c$	17,6749°	= β	117,3251°	$= h_a$	1,488	$= h_c$	2,901

19) $b = 60$ mm, $\alpha = 30°$, $\gamma = 100°$

Kongruenzsatz WSW Zunächst muss über die Winkelsumme β berechnet werden. Dann muss der Sinussatz angewendet werden, z.B. $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow$



$c = b \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 7{,}71\ldots$ cm. Dieses Ergebnis speichern. Man wendet erneut den Sinussatz an, also

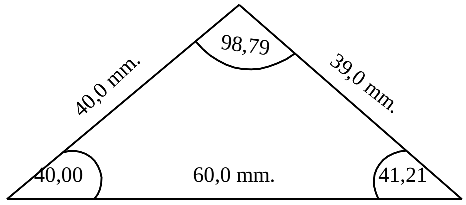
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow a = b \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 3{,}916\ldots$ cm.

Fläche: z.B. $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \cdot \sin\alpha$. $A = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
3,916	6	7,71	30°	50°	100°	5,909	3,857	3	11,57

20) $b = 40$ mm, $c = 60$ mm, $\alpha = 40°$

Kongruenzsatz SWS. Es muss der Kosinussatz angewendet werden. Es muss der Kosinussatz angewendet werden. $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} = 3{,}90\ldots\text{cm}$. Das Ergebnis unbedingt

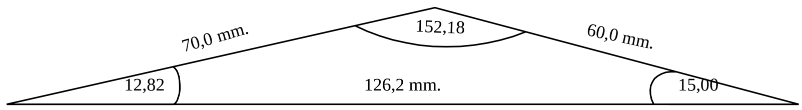


speichern! Einfacher geht es mit dem Sinussatz weiter. Bei $\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c}{b} \cdot \sin\beta$ weist das falsche Ergebnis $\sin\gamma = 0{,}9882\ldots \Rightarrow \gamma = 81{,}21\ldots°$ uns auf ein Problem hin! Berechnen wir γ nicht über die Winkelsumme, sondern aus $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{a} \cdot \sin\alpha = 0{,}6588\ldots \Rightarrow \beta = 41{,}21\ldots°$, dann ergibt die Winkelsumme $162{,}42\ldots°$. Das Ergebnis für β speichern! β muss richtig sein, denn b ist die kürzere Seite. c ist die längste Seite, deshalb muss der Winkel γ in diesem Fall größer als 90° sein.
$\sin 180° - \gamma = 0{,}9882\ldots \Rightarrow \gamma = 180° - 81{,}21\ldots° \Rightarrow \gamma = 98{,}78\ldots°$. Ohne diese Kontrolle wäre der Winkel γ falsch berechnet worden!

Fläche: z.B. $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \cdot \sin\alpha$. $A = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
3,903	4	6	40°	41,2114°	98,7886°	3,953	3,857	2,571	7,713

21) $a = 60$ mm, $b = 70$ mm, $\beta = 15°$



Kongruenzsatz SsW. Da der Winkel der längeren Seite gegenüberliegt, gibt es nur eine Lösung. Es muss der Sinussatz angewendet werden. $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{b} \cdot \sin\beta = 0{,}2218\ldots \Rightarrow \alpha = 12{,}81\ldots°$. Diesen Wert speichern! Über die Winkelsumme γ berechnen. Diesen Wert speichern!

Man wendet erneut den Sinussatz an, also $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow c = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = 12{,}6\ldots\text{cm}$.

Fläche: z.B. $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \cdot \sin\alpha$. $A = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin\alpha$.

a	b	c	α	β	γ	h_a	h_b	h_c	A_Δ
6	7	12,6	12,81742	15	152,1826	3,267	2,8	1,553	9,8